

Kymmenjärjestelmä – matematiikan osaamisen kulmakivi

HANNU KORHONEN, lehtori emeritus, Orimattila

Laskutaitoja ei saa unohtaa uusien opetussuunnitelman perusteita laadittaessa, vaikka mekaanisten laskutaitojen yleinen tarve on vähenemässä. Lukujen tajun merkitys lisääntyy ja joillakin aloilla numeeristen laskutaitojen tarve ja vaatimustaso kasvavat entisestään. Keskeisten asioiden kuten kymmenjärjestelmän opettamiseen on siksi etsittävä uusia keinoja.

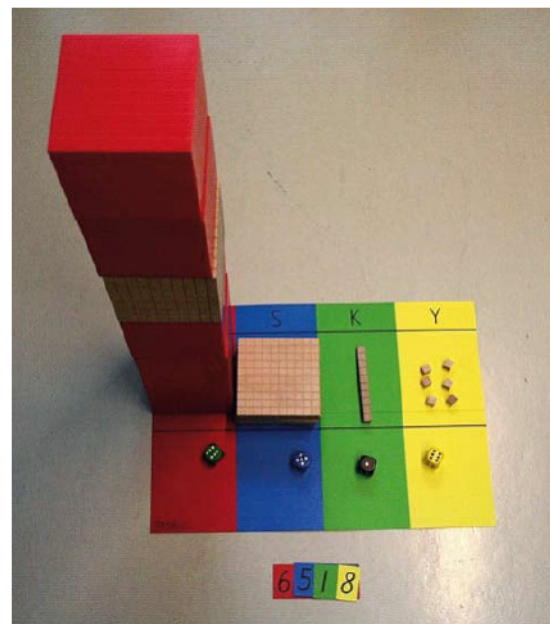
Maanmainiossa kirjassaan *Numeroidouomuu* John Allen Paulos kertoo amerikkalaisesta televisiotoimittajasta, jonka lukema sääennuste lupasi sadetta viidenkymmenen prosentin todennäköisyydellä sekä lauantaiksi että sunnuntaiksi ja joka päätteli tästä, että sateen todennäköisyys koko viikonlopun aikana olisi sata prosenttia [1]. Samantapainen ymmärtämättömyys näkyy englanninkielisen tekstin kääntämisessä suomeksi, kun englannin sana *billion* kääntyy biljoonaksi ilman, että se herättää kääntäjän tai lukijan huomiota.

Kaikki laskutaitotilanteet eivät ole näin julkisia tai harhaanjohtavia, mutta ymmärtämistä tarvitsee jokainen arkipäivässään. Ja vaikka selviytyisikin ilman laskutaitoa, niin sen kanssa on paljon helpompaa ja varmempi tulla toimeen. Lukujen ymmärtämisen ja laskutaitojen puutteet rajoittavat elämistä samalla tavalla kuin jos ei osaisi ajaa polkupyörällä tai jos ei osaisi käyttää puhelinta tai verkkoselainta. Täysin eri asemassa ovat ne ammattialat, joilla laskutoimitusten tulosten varmistaminen on elintärkeää kuten lääkelaskennassa.

Suurinta vaikerrusta laskutaitojen puutteet ovat herättäneet ammatillisessa koulutuksessa. Yhä suuremmalta osalta väestöstä edellytetään ymmärtämistä vaativia laskutaitoja sekä työelämässä että arkipäivässä: suuruusluokkien arviointia ja laskutuloksen oikeellisuuden varmistamista. Nykyinen mekaanisten laskutoimitusalgoritmien rutiinomaista harjoittelua korostava opetus ei näytä tuottavan tarvittavaa osaamista, sillä aivan viime vuosina laskutaidot ovat alkaneet heiketä Opetushallituksen tuoreen tutkimuksen mukaan [2].

Apua käsitteenmuodostusvälineistä

Uusia keinoja on siis etsittävä. Toiminnallinen käsitteenmuodostusmateriaali *kymmenjärjestelmävälineistö* on yksi niistä. Välineistö koostuu ykköskuutioista, kymmensauvoista, satalevyistä ja tuhatkuutioista Näistä kootaan lukujen malleja alustalle, jolla on sarake kullekin lukuyksikölle (Kuva 1). Tavoitteena on kymmenjärjestelmän hallinta. Lukukäsite syvenee, päässälaskustrategioita ja laskualgoritmeja sekä yksikönmuunnoksia ymmärretään paremmin. Taidoista tulee myös pysyvämpiä, kun oppija ymmärtää oppimaansa eikä vain opettele ulkoa.



Kuva 1. Kymmenjärjestelmävälineillä rakennettu luvun malli. Mikä vika on kuvassa? [Kuva: Pieta Voipio]

Ymmärtäminen perustuu konkreettisten mallien antamiin mielikuviin. ”Erityisesti oppimisvaikeuksissa oleville on tärkeää, että heille tarjotaan matematiikkaan muutamia pysyviä ankkureita”, sanoo kymmenjärjestelmän opettajanoppaan *KYMPPI-kirjan* kirjoittaja **Hannele Ikäheimo** [3, 4]. Yksi näistä ankkureista on kymmenjärjestelmävälineiden kuutioisenttimetrien kokoinen yksikkökuutio.

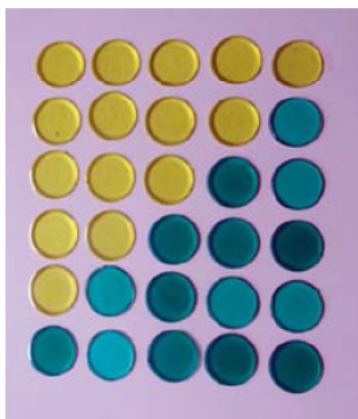
Nykyään kymmenjärjestelmävälineisiin on saatavana myös desimaaliosat. Niiden perusteella selviää

muun muassa, miksi 0,5 on sama kuin puoli ja miksi 0,125 on pienempi kuin 0,5, vaikka edellisessä on enemmän numeromerkkejä. Ymmärtämisen tarve korostuu yksikönmuunnoksissa. Ulkoa oppimisenkin perusteella on helppo muistaa, että $1\text{ m} = 100\text{ cm}$, mutta toisinpäin muunnettaessa tarvitaan ymmärrystä, koska muistettavaa tulee kovin paljon, jos kaikki suhdeluvut on muistettava erikseen. Ulkoa opeteltaessa $1\text{ cm} = 0,01\text{ m}$ on edellisestä erillinen muistisääntö, mutta vasta ymmärrys paljastaa, että kyse on vain saman asian eri puolista.

Kymmenjärjestelmävälineillä voidaan mallintaa myös laskutoimituksia ja laskulakeja. Näidenkin mielikuvien luomisessa on tärkeää, että oppilas saa itse rakentaa lukujen ja laskutoimitusten malleja eikä toiminta jää opettajan rakentamien mallien tunnistamiseksi. Välineet eivät ole itsetarkoitus, mutta niitä on saatava käyttää niin kauan kuin oppilas niitä tarvitsee. Sopiva välivaihe välineistä luopumisen on mallin piirtäminen. Se antaa oppilaalle muun muassa konkreettisia välineitä abstraktimman pinta-alamallin. Välineiden käyttöön kuuluu olennaisena osana myös toiminnan kielentäminen, siis se että oppilas selostaa ääneen sitä mitä on tekemässä.

Muita lukukäsitteen opettamiseen sopivia käsitteenmuodostusvälineitä ovat opetusrahat, värinapit ja -sauvat. Opettajan osuus on tärkeä myös välineiden käytössä, jotta työskentely ei jäisi vain satunnaisen kokeilun asteelle, vaan se olisi tavoitteellista ja järjestelmällistä vaihtoehtomahdollisuuksien tutkimista (Kuva 2).

Lukuihin liittyvä pelinomainen materiaali on Varga-Neményi-menetelmän hajotelmaruudukko. Sen idea on samantapainen kuin kirjainristikon, josta etsitään sanoja. Nyt vain ristikossa on lukuja ja siitä etsitään tietyn luvun hajotelmia. Ruudut voidaan värittää tai peittää värikalvon palasella (Kuva 3).



Kuva 2. Luku 5 ja sen hajotelmat värinapeilla esitettynä. [Kuva kirjoittajan]

1	2	2	2	2	4	3	4	2
7	0	5	1	6	1	0	3	0
0	3	6	2	4	5	1	6	2
1	1	0	2	2	1	3	0	2
7	0	9	1	5	2	4	4	4
0	2	0	0	4	4	0	1	1

Kuva 3. Varga-Neményi-hajotelmaruudukon osa, johon on merkitty luvun 8 hajotelmia [3].

Konkreettisen materiaalin merkitys

Opettajalta vaaditaan paljon. Saadakseen opetuksensa järjestetyksi monipuoliseksi hänen pitää tuntea laajalti välineitä ja niiden käyttötapoja. On tosi sääli, että matematiikan didaktiikkaa sisältyy niin vähän sekä luokan- että aineopettajien perusopintoihin, että ei voi kuvitellakaan välineiden käytön tulevan edes tutuksi, saati luontevaksi osaksi opettajaidentiteettiä. Ongelma ei siis aina ole välineiden puutteessa, vaan todellakin myös osaamisessa: ”Koululle on hankittu todella paljon konkreettisia välineitä ja pelejä. Kukaan ei tiedä, miten niitä käytetään!”

Kokematon tai kokenutkin, mutta välineiden käyttöä tuntematon opettaja saattaa ajatella, että välineistä on apua vain alkuopetuksessa ja ehkä ihan opetuksen alkuvaiheessa muilla alaluokilla. Oppilaan ikätason mukainen matematiikan ymmärtäminen rakentuu kuitenkin omakohtaisten kokemusten kautta. Lukuja ja niiden välisiä suhteita sekä laskutoimituksia on saatava tutkia ja rakentaa itse. Välineiden käyttäminen tarkoittaa, että jokaisella oppilaalla on omat välineet käsitteen opetteluun vaiheessa.

”Ne eivät ole vain heikkojen ja hitaiden oppilaiden apuvälineitä, vaan kaikkien oppilaiden, myös sen lahjakkaimman, kognitiivisia työkaluja. Tämä pitäisi takoa jokaisen opettajan päähän tulikirjaimilla”, sanoo Espoon Matikkamaan konsultoiva opettaja **Anni Lampinen**. Toiminnallisia käsitteenmuodostusvälineitä ei voi eikä saa unohtaa perusopetuksen yläluokilla eikä lukiossakaan, sillä seitsemännelle luokalle tulevista oppilaista 85 prosenttia ja vielä yhdeksättäkin luokkaa päättävistä 70 prosenttia ajattelee konkreettisesti [5].

Kymmenjärjestelmän hyvä hallinta on tarpeen yläluokillakin esimerkiksi yksikönmuunnoksissa. ”Pilkku siirtyy -tekniikalla opettamisessa oppilaat eivät ymmärrä muunnosten pohjan olevan kymmenjärjestel-

mässä. – – Vasta yksikköjärjestelmän ymmärtämisen jälkeen voidaan siirtyä automatisoimaan muunnoksia. Kokemukseni mukaan yksikkömuunnostehdävät, jotka pitäisi hallita alakoulusta, ovat vaikeita kaikentasoisille oppilaille erityisoppilaista lahjakkaisiin”, sanoo Olarin koulun matematiikan lehtori **Rita Järvinen** Espoosta. ”Tätä samaa kymmenjärjestelmän rakenteeseen pohjaavaa ideaa, jossa paikkajärjestelmän numerot kertovat lukuyksiköiden määrän, tarvitaan otettaessa muuttujakirjaimet käyttöön.”

Ulkoa opittujen sääntöjen varaan jääneet asiat unohtuvat helposti tai säännöt voidaan muistaa väärin. Ymmärryksen puute vaikeuttaa lisäksi olennaisesti uuden oppimista, kun matematiikka tuntuu jäsenyttömältä sääntöviidakolta, jossa ei ole mitään kiinnekohtia, johon uudet asiat voitaisiin liittää. Kaikesta tästä on hälyttäviä kokemuksia sekä lukiosta että ammatillisesta koulutuksesta. Ammattilaskennon valmiuksien kartoituksissa murtoluvut, yksikönmuunnokset ja prosenttilaskut ovat osoittautuneet kaikkein vaikeimmiksi osa-alueiksi. Seuraavaksi vaikeimpia osa-alueita ovat desimaali- ja murtolukujen muunnokset. Kaikkien näiden vaikeuksien taustalla on kymmenjärjestelmän heikko osaaminen. Sen selvittämiseksi on kehitetty erityinen testistö KYMPPI-kartoitus [6, 7].

Opetus jatkuu yläluokilla

KYMPPI-kartoitus koostuu kahdesta yksinkertaisia perustehtäviä sisältävästä kokeesta sekä niihin liittyvästä harjoitusmateriaalista. Tämä ei sisällä pelkkiä tehtäviä, vaan siinä myös ohjeita opettajalle ja esimerkkejä monipuolisista harjoitteista. KYMPPI-kartoitus on ensijaisesti perusopetuksen alaluokkien työväline, mutta se on hyödyllinen vielä seitsemännelläkin luokalla. Kymmenjärjestelmän käsittely ei nimittäin pääty alaluokille, vaikka kymmenjärjestelmän hallinnan varmistaminen on keskeistä sisältöä jo luokilla 4–5. Viides luokka onkin oivallinen kohta kartoituksen kakkoskokeen tekemiseen, sillä silloin on vielä vuosi aikaa panna asiat kuntoon ennen yläluokille siirtymistä.

Seitsemännellä luokalla kymmenjärjestelmä tulee luontevasti esiin likiarvojen ja kymmenpotenssien yhteydessä. Puutteita saattaa olla varsinaisissa laskuissakin, jopa sellaisissa päässä laskettavissa desimaalilukujen yhteenlaskuissa, johon sisältyy kymmenlyitys. Hallinnan ylläpitoa ja syventämistä on muutenkin tarpeen jatkaa yläluokilla. Sen ei tarvitse olla mekaanista toistamista, vaan luovuutta ja keksimistä vaativiakin harjoitteita on helposti saatavissa. Siihen sopivat esimerkiksi salalaskut, joissa etsittävinä

ovat laskuasetelmasta piilotetut numerot. Myös luvun 0,999... pohtiminen sopii. Jo kuudesluokkalaisiinkin purevan konkreettisen muodon tehtävä saa, kun erotus $1 - 0,999...$ kirjoitetaan allekkainlaskuksi ja kysytään, minkä lukuyksikön kohdalle saadaan viivan alle ensimmäinen nollassa poikkeava numero.

KYMPPI-kartoitusta on käytetty seitsemännän luokan alussa keravalaisessa *Sompion koulussa*. Syksyllä 2012 vain kaksi oppilasta sai täydet pisteet KYMPPI-kartoituksen kakkososasta, vaikka kaikkien oppilaiden tulisi pystyä tähän jo viidennellä luokalla. Hyvin huolestuttavaa oli, että lähes joka neljäs (23 %) jäi alle 70 prosenttiin maksimipistemäärästä. Tämä kertoo siitä, että vaikka asiat olisi opetettu kuinka hyvin alaluokilla, niin nykyinen opettamisen tapa ei tuota kestävää tulosta, jos käsitteenmuodostusvälineitä ei ole käytetty eikä käsitteenmuodostus ole siten pohjautunut ymmärtämiseen. Välineiden käyttökoulutusta tarvitsisivat siis ilmeisesti yhtä hyvin luokan-, aineen- kuin erityisopettajatkin.

Samanaikaisesti opetettavista luokista muodostettiin *Sompion koulussa* kolme erilaista ryhmää, jotta korjaavien toimien kohdistaminen olisi mahdollisimman tarkoituksenmukaista. Joustavien ryhmien tehostettua käyttöönottoa voidaan perustella esimerkiksi Opetushallituksen tuoreimman arviointiselvityksen havainnolla, jonka mukaan ”koulut, joissa oli käytetty matematiikan opetuksessa ryhmittelyä, menestyivät tilastollisesti merkitsevästi paremmin kuin koulut, joissa matematiikan opetus tapahtui kiinteissä, heterogeenisissä ryhmissä” [2]. Kokemukset ovat olleet niin hyviä, että *Sompion koulussa* on tarkoitus jatkaa ryhmittelyä ensi syksynä seuraavankin ikäluokan osalta.

Lisää luettavaa:

- 1] Paulos, J. A. Numero.aico..omuus. Neljäs painos. Ar. House, Helsinki 2012.
- 2] Hirvonen, K. Onko lasku.ai.o laskussa? Ma.ema.iikan oppimis.ulokse. peruskoulun pää..övaiheessa 2011. Koululuksen seuran.arapor.i. 2012:4, Ope.ushalli.us, lampere 2012.
- 3] Ikäheimo, H. KYMPPI-kirja. Ma.ema.iikan osaamisen perus.a vahvaksi 10-järjes.elmällä. Opperi, Van.aa 2012.
- 4] Korhonen, H. KYMPPI-kirjan esi..ely. EDimensio: [h..p://www.maol.i/julkaisu/ecimensio/vuosiker.a-2013/kirjallisuus.a/](http://www.maol.i/julkaisu/ecimensio/vuosiker.a-2013/kirjallisuus.a/).
- 5] Hau.amäki, J. Kehi.ye.asojen ero. ja kehi..ävä. eh..ävä.. Julkaisussa Paananen, S. (oim.) Lumiukkoko .iece..ä? lieceopiskelua koulussa II. VAPK-kus.annus, Helsinki 1991.
- 6] Ikäheimo, H. KYMPPI-kar.oi.us. 10-järjes.elmän hallinnan kar.oi.us. Opperi, Van.aa 2012.
- 7] Korhonen, H. KYMPPI-kar.oi.usen esi..ely. EDimensio: [h..p://www.maol.i/julkaisu/ecimensio/vuosiker.a-2013/kirjallisuus.a/](http://www.maol.i/julkaisu/ecimensio/vuosiker.a-2013/kirjallisuus.a/) ■