

Anni Lampinen

## **Kertotaulujen oppimisen strategioita**

Kertotaulujen osaamattomuus voi olla suuri kompastuskivi matematiikan oppimisessa: huolimatta runsaastakin harjoittelusta kertotaulut eivät jää mieleen. Kuitenkin kertotaulujen oppimisen ongelmien taustalla on usein ollut jo muita matematiikan oppimisen ongelmia, joihin ei välttämättä ole osattu tarttua aikaisemmin. Muun muassa lukujen käsittelyn taito, puutteelliset lukujonotaidot ja kapea työmuisti vaikeuttavat kertotaulujen oppimista ja sujuvaa käyttämistä. Oppilas on saattanut jäädä kiinni sormiinsa pieniä yhteen- ja vähennyslaskutehtäviä suorittaessaan tai käyttää monimutkaisia ja kömpelöitä ratkaisutapoja melko yksinkertaisissakin tehtävissä. Kymmenylitys lukuja hajoittamalla yhteen- ja vähennyslaskussa ei ole mahdollisesti sujunut. Oppilaan työmuisti saattaa olla tavallista kapeampi, jolloin hän ei kykene käsittelemään ja yhdistämään oppimisessaan tarvittavia vanhoja ja uusia tietoja yhtä aikaa. Oppilas ei myöskään kykene itse kehittämään itselleen matemaattisesti oikeita ja mielekkäitä kompensatiokeinoja, vaan saattaa luoda itselleen koko joukon irrallisia ja pinnallisia muistisääntöjä. Tilanne hajoaa ja käsitys opittavasta asiasta jää vajaaksi, kun työmuistia kuormittaa uuden oppimisen sijaan aiempien taitojen puutteellinen tai mekaaninen osaaminen. Tällöin muun muassa kertolaskun käyttäminen matematiikan soveltavissa tehtävissä ja yhteys kertolaskun ja muiden peruslaskutoimitusten välillä saattaa jäädä oppimatta.

Matematiikan oppimisvaikeusoppilas saattaa oppia kertolaskun käsitteen hyvin, mutta laskurutiinia ei synny ja oppilas tarvitsee koko ajan konkreetteja välineitä laskujen tuloksen selville saamiseksi. Kertotaulujen ulkoaopettelu alkaa ilman, että oppilas osaa kertotaulujen oppimiselle tarvittavia pohjatietoja. Tällöin

epäonnistumisen vaara on suuri. Lopulta saatetaan päätyä ratkaisuun, jossa oppilas saa käyttää kertolaskutaulukkoa tai laskinta aina tarvitessaan kertolaskua. Kuitenkin ennen kuin tähän päädytään, kannattaa palata varmentamaan pohjatietojen ja -taitojen osaamista, kehittää oppilaan lukujen käsittelyn taitoa sekä opettaa kertolaskuissa tarvittavia toimivia kompensatiokeinoja ja uusia strategioita.

## **A. Välttämättömät pohjataidot**

1. Lukujen eri ilmenemismuotojen ymmärtäminen, esimerkiksi että luvun 4 yksi muoto on  $5 - 1$ , tai luku 6 voidaan kirjoittaa myös muodossa  $5 + 1$ . Tällä pohjustetaan kertolaskun ositteluominaisuuden käyttämistä eli kertolaskun osittamista helpommin laskettaviin ryhmiin.
2. Lukualueen 0 – 10 summien ja erotusten hyvä hallinta automatisoituneina ilman sormia.
3. Lukualueen 0 – 20 yhteen- ja vähennyslaskujen sujuva hallinta mieluiten lukujen hajoittamista käyttäen kymmenylityksissä.
4. Kaksinkertaistaminen ja puolittaminen, sekä niiden välisen yhteyden ymmärtäminen.
5. Lukualueen 0 – 100 yhteen- ja vähennyslaskujen osaaminen analogioiden avulla.
6. Lukujonot 0 – 100 yhden askelin sekä etu- että takaperin. Harjoitellaan lisäksi viimeistään kertotauluja opeteltaessa ensin samalla 2:n, 5:n ja 10:n askeleen hyppyjä. Tämän jälkeen 4:n ja 8:n sekä 3:n ja 6:n askelin – mahdollisesti vielä 7:n ja 9:n askelin.
7. Kymmenjärjestelmän periaatteen ymmärtäminen.

## B. 2:n lyhyt kertotaulu

Varmennetaan kerto-käsitteen ymmärtäminen esimerkiksi toimintavälineillä ja/tai piirtämällä. Oppilaalle opetetaan, että ensimmäinen tulontekijä on **kertoja**, joka ilmoittaa, kuinka monta kertaa **kerrottava** (eli jälkimmäinen tulontekijä) on otettava.

Opetellaan ensin kahden lyhyt kertotaulu. Kirjoitetaan se paperille ja tutkitaan lyhyen kertotaulun rakennetta ja yhteyksiä. Etsitään kaksinkertaistamiset ja puolittamiset kahden ensimmäisen ja kahden viimeisen lyhyen kertotaulun laskun osalta. Tärkeää on havaita tässä vaiheessa, että 2 on 1 kahdesti sekä 5 on puolet 10:stä. Sama suhde ja idea kaksinkertaistamisesta ja puolittamisesta on havaittavissa myös lyhyen kertotaulun vastaavissa tuloissa.

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$5 \cdot 2 = 10$$

$$10 \cdot 2 = 20$$

Opetellaan ensin lyhyet kertotaulut ulkoa. **Kopitellaan** eli heitellään pareittain palloa, hernepusia tms. Jokaisella heitolla heittäjä sanoo samalla lyhyen kertotaulun seuraavan laskun. Kuljetaan lyhyttä kertotaulua edestakaisin. Toistetaan 10:llä kerrottu lasku, jolloin takaperin työskenneltäessä toistettava lasku vaihtuu molemmilla kopittelijoilla. Heitellään niin kauan, että eteneminen on sujuvaa.

$$1 \cdot 2 = 2 , 2 \cdot 2 = 4 , 5 \cdot 2 = 10 , 10 \cdot 2 = 20$$

(huomaa viimeisen laskun toisto)

$$10 \cdot 2 = 20 , 5 \cdot 2 = 10 , 2 \cdot 2 = 4 , 1 \cdot 2 = 2$$

Kopitellaan vielä pelkät lyhyen kertotaulun tulot lukujonona edestakaisin, kunnes nekin sujuvat nopeasti ja vaivattomasti:

2, 4, 10, 20, 20, 10, 4, 2.

### C. 2:n kertotaulun päättelyminen lyhyen kertotaulun avulla

Opetellaan päättelymään ja laskemaan muut kertolaskut käyttäen apuna suorakulmion muotoista munakenno-mallia. Opetellaan piirtämään itse malli, josta on helposti laskettavissa yhteen- ja vähennyslaskun avulla puuttuvat kertolaskut. Malliin lisätään luvut aina vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas. Lukuja poistettaessa edetään oikealta ja alhaalta.

$$5 \cdot 2 = \underline{\quad}$$

Piirretään pohja, johon lisätään 5 kakkosta:

2	2	2	2	2

Huomataan, että ruudukon ylärivi tuli täyteen kakkosia ja todetaan, että se vastaa lyhyen kertotaulun 5:llä kertomista eli tulo saadaan suoraan jo opitusta lyhyestä kertotaulusta: 10.

$$3 \cdot 2 = \underline{\quad}$$

Lisätään lyhyen kertotaulun  $2 \cdot 2 = 4$  vielä 2 eli  $4 + 2 = 6$ , koska 3 on myös  $2 + 1$ :

2	2	2		

$$4 \cdot 2 = \underline{\quad}$$

Poistetaan 2 lyhyen kertotaulun  $5 \cdot 2 = 10$ :stä eli  $10 - 2 = 8$ , koska 4 on myös  $5 - 1$ :

2	2	2	2	2

Lasku **voidaan tarvittaessa** merkitä ruudukon oikealle puolelle.

2	2	2	2	2

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 2 \\ \hline 8 \end{array} \quad \text{tai } 10 - 2 = 8$$

$$6 \cdot 2 = \underline{\quad}$$

Lisätään lyhyen kertotaulun  $5 \cdot 2 = 10$  vielä 2 eli  $10 + 2 = 12$ , koska 6 on myös  $5 + 1$ :

2	2	2	2	2
2				

Lasku **voidaan tarvittaessa** merkitä ruudukon oikealle puolelle.

2	2	2	2	2
2				

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 2 \\ \hline 12 \end{array} \quad \text{tai } 10 + 2 = 12$$

$$7 \cdot 2 = \underline{\quad}$$

Lisätään  $5 \cdot 2 = 10$ :een 2 kakkosta eli 4, koska 7 on myös  $5 + 2$ :

2	2	2	2	2
2	2			

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 4 \\ \hline 14 \end{array} \quad \text{tai } 10 + 4 = 14$$

$$8 \cdot 2 = \underline{\quad}$$

Lisätään pohjaan ensin  $10 \cdot 2 = 20$  eli lyhyen kertotaulun viimeinen lasku.

Otetaan 20:stä pois kaksi kakkosta eli 4, koska 8 on myös  $10 - 2$ .

2	2	2	2	2
2	2	2	2	2

$$\begin{array}{r}
 20 \\
 - 4 \\
 \hline
 16
 \end{array}
 \quad \text{tai } 20 - 4 = 16$$

$$9 \cdot 2 = \underline{\quad}$$

Lisätään pohjaan ensin  $10 \cdot 2 = 20$  eli lyhyen kertotaulun viimeinen lasku.

Otetaan 20:stä pois 2, koska 9 on myös  $10 - 1$ .

2	2	2	2	2
2	2	2	2	2

$$\begin{array}{r}
 20 \\
 - 2 \\
 \hline
 18
 \end{array}
 \quad \text{tai } 20 - 2 = 18$$

Harjoitellaan ja automatisoidaan laskustrategioiden käyttöä kertolaskupelien avulla. Esimerkiksi heitetään 0 – 9 -noppaa, josta saadaan kertoja, kun kerrottava on 2. Tai nostetaan kortteja, joissa on harjoiteltavia kertolaskuja; pelataan bingoa tai käytetään sellaisia virtuaalisia kertolaskujen oppimisaihiota, joissa ei ole visuaalista mallia ja joissa ei oteta aikaa.

Tuetaan aluksi mallin piirtämistä, jos se näyttää tarpeelliselta. Oppilasta ohjataan kuitenkin melko pian tekemään piirros vain mielessään mielikuvan avulla, jolloin oppilas kielentää laskustrategian. Tavoitteena on nopea, pelkästään mielikuvissa tapahtuva laskeminen.

Huomiota kiinnitetään strategioiden sujuvuuden lisääntymiseen ja laskemisen vaivattomuuteen. Mikäli oppilas käyttää jotain muutakin

strategiaa ja sen käyttäminen näyttää sujuvalta, tuetaan myös tämän strategian käyttöä. Kuitenkin jos oppilaan käyttämä strategia on monimutkainen, pyritään määrätietoisesti ohjaamaan yksinkertaisemman ja taloudellisemman strategian vahvistumiseen.

## **D. 5:n ja 10:n kertotaulujen päätteleminen lyhyen kertotaulun avulla**

Työskennellään oppilaan kanssa samalla tavalla kuin edellä kahden kertotaulua opeteltaessa. Nämä kertotaulut kuuluvat niin sanottuihin helppoihin kertotauluihin, jolloin huomiota on helppo kiinnittää itse päättely- ja laskutapaan. Tällöin strategian käyttö varmentuu.

Kertolaskustrategioita sujuvoitettaessa pelataan erilaisia pelejä, joissa aluksi harjoitellaan aina yhtä kertotaulua, sitten kahta ja lopulta sekoitettuna 2:n, 5:n ja 10:n kertotaulut.

## **E. Muut kertotaulut**

Loput kertotaulut opetellaan yksi kerrallaan, edetään mieluiten järjestyksessä 3 ja 6 sekä 4 ja 8, jolloin voidaan tarkastella näiden kahden kertotauluparin yhtäläisyyksiä visuaalisena mallina (kaksinkertaistuminen), taulukkomuodossa ja tulojen lukujonoina. Tällöin pohjustetaan samalla myös lukujen jaollisuutta.

Oppilaalle opetetaan myös kertolaskun vaihdannaisuus: vaikka tulontekijöiden paikkaa vaihdetaan, itse tulo on sama. Oppilas voi siis laskeessaan itse valita helpomman laskutavan. Mikäli oppilas on

oppinut vaihdannaisuuden hyvin, uusissa kertotauluissa on aika vähän enää oppilaalle aidosti uusia kertolaskuja.

Myös 7:n ja 9:n kertotaulut kannattaa käydä läpi oppilaan kanssa ja miettiä, miten hän pystyy ne parhaiten päättelemään. Mikäli on tarpeellista, edetään kuten aikaisemminkin ja käydään jokainen kertolasku samaan tapaan kuin edellisten kertotaulujen kanssa on menetelty. 7:n kertotaulusta ainoastaan  $7 \cdot 7 = 49$  ja  $9 \cdot 7 = 63$  eivät ole olleet aikaisemmin esillä. Todennäköisesti oppilas on jo oppinut käyttämään 9:llä kertoessaan vähentämistä 10:n kautta.

### Esimerkiksi 8:n kertotaulu

Opetellaan ensin lyhyet kertotaulut, kopitellaan ne jne. (Ks. kohta B sivulla 3).

$$3 \cdot 8 = \underline{\quad}$$

Lisätään kahteen kahdeksikkoon (=16) yksi 8.

8	8	8		

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 + \quad 8 \\
 \hline
 24
 \end{array}
 \quad \text{tai } 16 + 8 = 24$$

$$5 \cdot 8 = 40$$

Viisi kertaa kahdeksan osataan! Se on 40.

8	8	8	8	8

$$40$$

$$4 \cdot 8 = \underline{\quad}$$

Otetaan pois viisi kertaa kahdeksasta (= 40) yksi 8.

8	8	8	8	8

$$\begin{array}{r}
 40 \\
 - \quad 8 \\
 \hline
 32
 \end{array}
 \quad \text{tai } 40 - 8 = 32$$



$$6 \cdot 8 = \underline{\quad}$$

Lisätään viisi kertaa kahdeksaan (= 40) yksi 8.

8	8	8	8	8
8				

$$\begin{array}{r} 40 \\ + 8 \\ \hline 48 \end{array} \quad \text{tai } 40 + 8 = 48$$

$$7 \cdot 8 = \underline{\quad}$$

Lisätään 40:een kaksi kahdeksikkoa eli 16.

8	8	8	8	8
8	8			

$$\begin{array}{r} 40 \\ + 16 \\ \hline 56 \end{array} \quad \text{tai } 40 + 16 = 56$$

$$8 \cdot 8 = \underline{\quad}$$

Otetaan 80:stä pois kaksi kahdeksikkoa eli 16.

8	8	8	8	8
8	8	8	<del>8</del>	<del>8</del>

$$\begin{array}{r} 80 \\ - 16 \\ \hline 64 \end{array} \quad \text{tai } 80 - 16 = 64$$

$$9 \cdot 8 = \underline{\quad}$$

Otetaan 80:stä pois yksi 8.

8	8	8	8	8
8	8	8	8	<del>8</del>

$$\begin{array}{r} 80 \\ - 8 \\ \hline 72 \end{array} \quad \text{tai } 80 - 8 = 72$$

### Taitojen vahvistaminen ja ylläpitäminen

On tärkeää, että oppilas oppii luottamaan omaan kykyynsä laskea mikä tahansa kertolasku, vaikka se veisikin hieman enemmän aikaa. Tehdessään tehtäviä tunnilla tai koetilanteessa kykyihinsä luottava oppilas ei mene paniikkiin, vaan kykenee selviytymään tehtävistä vaikka itse kertolaskujen laskeminen ei vielä sujuisikaan

nopeasti. Tutut ja itselle sopivat laskemista helpottavat kompensatiokeinot vapauttavat tällöin oppilaan työmuistia itse tehtävän idean ratkaisemiseen.

Kertolaskujen osaamista kannattaa aika ajoin aina kerrata. Erityisesti oppilaan hankalaksi kokemia laskuja on syytä "pitää silmällä". **Ajan ottaminen kertolaskuja laskettaessa ei ole aina perusteltua**, vaan tärkeämpää on, että oppilaalla on käytössä hänelle sopivat tehokkaat keinot selvittää mistä tahansa kertolaskusta kohtuullisessa ajassa.

\*\*\*\*\*

Lämmin kiitos mallin pohjana olleista ideoista  
matematiikkaterapeutti Marja Drägerille,  
erityisopettaja Natalie Stolbowille ja luokanopettaja Sari Laasilalle.