Käsitteen ymmärrystä ja mekaanista laskutaitoa mittaavat tehtävät viidennen luokan murtolukukokeissa

Pro Gradu –tutkielma

Pentti Yrjänäinen

Soveltavan kasvatustieteen laitos

Helsingin yliopisto

Ohjaaja Reijo Byman

Huhtikuu 2011

Sisällys

1. Johdanto

Kädet hikoavat, pulssi kiihtyy: ”Osaanko minä mitään, en edes tajua mitä tässä kysytään.” Kokeet ja niiden palautustuokiot ovat koulussa monelle oppilaalle jännittäviä tilanteita ja tunteet voivat vaihdella riemun kiljahduksista pettymyksen kyyneliin. Tämän lisäksi kokeiden tulokset vaikuttavat oppilaiden elämään myös pidemmällä tähtäimellä. Koenumerot määräävät pitkälti numeron kyseisessä oppiaineessa, vaikka nykyään arviointiperusteissa painotetaan jatkuvaa osaamisen arviointia ja luokkahuonetyöskentelyä. Vielä ehkä suurempana tekijänä on kokeiden vaikutus oppilaiden itsetuntoon ja käsitykseen omasta osaamisestansa. Monet muistavat vielä aikuisena menestyksensä tai menestymättömyytensä jonkun oppiaineen kokeissa ja sen perusteella luovat kuvan itsestään kyseisen aineen taitajana (Linnanmäki 2004, 243).

Arviointia pyritään kehittämään siihen suuntaan, että tärkeintä olisi havainnoida omaa kehitystä ja suhteuttaa koenumerot omaan osaamisen, ei verrata muihin. Kuitenkin koetuloksia verrataan myös muiden oppilaiden tuloksiin, ja usein kaverin tai kovan kilpakumppanin saama numero on aivan yhtä tärkeä kuin oma tulos. Usein koetuloksen vertaaminen muihin lisää ahdistusta (Huhtala & Laine 2004, 320–321).

Eri aineiden joukossa juuri matematiikan kokeet ovat monille erityisen mieleenpainuvia. Yleisesti koetaan, että matematiikka on aine, jota jotkut osaavat ja toiset eivät. Toisin sanoen joillakin on ”matikkapäätä” ja toisilla ei. Kokeissa tämä asetelma kulminoituu ja juuri koetulosten perusteella oppilaat usein luokittelevat itsensä joko osaajiin tai osaamattomiin (Huhtala & Laine 2004, 323; 331). Mutta entä jos kokeet eivät mittaakaan sitä, mitä niiden pitäisi?

Alakoulun viimeisillä luokilla monilla oppilailla ei ole kykyä arvottaa kokeiden mittaavuutta, ja pohtia tarkemmin niiden tarkkuutta erotella oppimistuloksia. Sen sijaan oppilaat ottavat kokeiden tulokset helposti ehdottomina totuuksina, ja siten kokeet vaikuttavat voimakkaasti myös minäkäsitykseen (Bloom, Hastings & Madaus 1971, 7, 55-56). Koetilanteeseen vaikuttavat kuitenkin monet seikat: koejännitys, keskittyminen, ulkoiset häiriötekijät, päiväkohtainen kunto ja silkka sattuma (Madaus, Russell & Higgins 2009, 51). Usein yhden oppitunnin aikana tehty yksittäinen koe määrittää kuukausien työn tuloksen. Kuitenkin on täysin mahdollista, että muut tekijät kuin oppilaan osaaminen vaikuttavat koetulokseen huomattavasti.

Opetussuunnitelman mukaan arvioinnin tulee olla seuraanvanlaista:

> *Opintojen aikaisen arvioinnin tehtävänä on ohjata ja kannustaa opiskelua sekä kuvata, miten hyvin oppilas on saavuttanut kasvulle ja oppimiselle asetetut tavoitteet. Arvioinnin tehtävänä on auttaa oppilasta muodostamaan realistinen kuva oppimisestaan ja kehittymisestään ja siten tukea myös oppilaan persoonallisuuden kasvua. Opintojen aikaisen arvioinnin tulee olla totuudenmukaista ja perustua monipuoliseen näyttöön.*

(Opetushallitus 2004, 260)

Kuinka arvioinnin saa perustuvaksi ”monipuoliseen näyttöön”? Nykyään painotetaan arvioinnin jatkuvuutta, oppilaan aktiivisuutta ja osallistuvuutta oppitunneilla sekä oppilaan itsearviointia omasta osaamisestaan (Opetushallitus 2004, 262–264). Kuitenkin myös kokeet ovat edelleen tärkeä osa arviointia. Tämän tutkimuksen olen rajannut koskemaan matematiikan kokeita, ja niissä erityisesti murtolukujen viidennen luokan oppimäärän osaamista. Täten ymmärrän yllä olevan opetussuunnitelmalainauksen kohdan ”arvioinnin tulee olla totuudenmukaista ja perustua monipuoliseen näyttöön” tarkoittavan myös sitä, että kokeen tulee mitata kattavasti opetettua asiaa ja antaa luotettava kuva oppilaiden osaamisesta.

Tutkiakseni oppilaiden osaamista valmistin kaksi murtolukukoetta, joista toisessa testattiin mekaanista laskutaitoa, ja toisessa kokeessa oli murtoluvun käsitteen ymmärtämistä mittaavia tehtäviä. Tutkimusmenetelmänä oli määrällinen eli kvantitatiivinen tutkimus, jossa otannan suuruus oli yhteensä 167 oppilasta. Kokeen valmistamisen myötä tutkimukselle kehittyi luonnostaan kaksi tarkoitusta: yhtäältä nykyisten oppikirjojen kokeiden antamien tulosten luotettavuuden tarkastelu, ja toisaalta uudentyyppisen kokeen kehittäminen. Kolmanneksi kokeiden teettäminen yli 160:lle oppilaalle antoi myös tietoa nykykoululaisten murtolukujen viidennen luokan oppimäärän osaamisesta.

Kokeet eivät ole irrallisia saarekkeita koulumaailmassa, vaan läheisesti kytköksissä opetukseen. Kokeet eivät ole vain heijastuksia oppituntien tapahtumista, vaan ne myös ohjaavat oppituntien toimintaa (Putkonen 1993, 40; Törnroos 2004, 56–57). Täten kokeen valmistusprosessi ja teetättäminen oppilailla herätti myös monia ajatuksia siitä, millaista matematiikan opetuksen kuuluisi olla. Yhtenä tärkeänä asiana nousi mekaanisen laskutaidon ja käsitteen ymmärtämisen välinen suhde opetuksessa. Molemmat ovat tärkeitä: pelkkä mekaaninen laskutaito ilman ymmärrystä jättää laskijan pulaan, kun opittua pitäisi soveltaa uudella tavalla. Toisaalta käsitteen ymmärrys ilman laskutaitoa jättää laskijan vailla vastausta. Kasvatustieteilijöiden taholta on Suomessa viime vuosina painotettu ymmärtämisen osuutta, kun taas monet matemaatikot ovat huolestuneita laskutaidon heikkenemisestä esimerkiksi jatko-opiskelun ja matemaattisen ammatillisen osaamisen kannalta. (Malaty 2007, 422; Martio 2007 30–31). Matemaattisten käsitteiden ymmärtäminen ja laskutehtävien suorittaminen eivät kuitenkaan sodi toisiaan vastaan, vaan kulkevat käsi kädessä. Täten hyvän opetuksen pitäisi antaa riittävät edellytykset molempiin.

Syvällisen matemaattisen ymmärryksen saavuttamiseksi yhtenä tärkeänä seikkana pidän hyvän havainto- ja toimintamateriaalin asianmukaista käyttöä opetuksen apuna. Murtoluvuissa näitä ovat esimerkiksi erilaiset pintamallit, kuten murtokakut, värisauvat ja mitkä tahansa joukkomallin havainnollistamiseen käytettävät esineet. Murtoluvut poikkeavat ominaisuuksiltaan ja käyttötavoiltaan kokonaisluvuista, ja tämän asian selkiyttäminen ajattelussaan vielä konkreettisella ajattelun tasolla oleville oppilaille vaatii hyviä havainto- ja toimintamateriaaleja (Cramer, Post & delMas 2002, 136–138).

Alun perin toimintamateriaaleilla piti olla vielä suurempi merkitys tämän tutkimuksen tekemisessä. Post et al. (1993) esittävät johtopäätöksen, että koska toiminta- ja havaintomateriaaleja pitää käyttää lasten matematiikan opetuksessa ja kokeissa pitää testata sitä mitä on opiskeltu, on syytä käyttää materiaaleja myös koetilanteessa. Tämä oli alunperin myös minun ideani tähän tutkimukseen. Kuten usein käy, suunnitelmat kuitenkin muuttuivat matkan varrella. Syitä oli kaksi, toinen käytännönläheinen ja toinen pedagoginen. Koska tutkimusmenetelmäksi valikoitui määrällinen tutkimus, olisi materiaaleja tarvittu huomattava määrä, ja empiirisen aineiston kerääminen olisi ollut huomattavan hankalaa. Ei myöskään ollut varmuutta, että tutkimukseen osallistuneissa luokissa on käytetty vastaavia materiaaleja opetuksessa, jolloin niiden käytön testaaminen ei ole reilua oppilaita kohtaan. Lisäksi voidaan perustella, että materiaalit ovat vain apuväline käsitteen opiskelussa, joten koetilanteeseen asti päästessä oppilaiden on jo hallittava tehtävät symbolimerkintöjä käyttäen (vertaa Lamon 2001, 149). Näin ollen tutkimus kohdentui murtolukujen käsitteen ymmärrystä mittaavien koetehtävien tutkimiseen.

2. Lukujärjestelmät ja murtoluvut

Malaty erottaa toisistaan termit lukujärjestelmä ja numerojärjestelmä. Lukujärjestelmä tarkoittaa lukujen joukkoa, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Joukko on summan ja tulon suhteen suljettu.
2. Vaihdannaisuus on voimassa kummassakin operaatiossa.
3. Liitännäisyys on voimassa kummassakin operaatiossa.
4. Kertomisoperaatio on distributiivinen lisäämisoperaatiolle.

Numerojärjestelmät ovat eri kulttuurien ja käyttämiä tapoja merkitä lukuja ja laskutoimituksia. (Malaty 2003, 53–54).

Käytämme laskemiseen kymmenjärjestelmää. Kyseessä on paikkajärjestelmä, jossa merkin paikka määrää sen arvon. Kantalukuna on kymmenen, jonka potenssiin saavuttaessa siirrytään aina seuraavaksi suurempaan yksikköön. Vaikka itse olemme tottuneet laskemaan juuri näin, ei tämä järjestelmä ole ainoa mahdollinen, eikä välttämättä aina edes paras. Historiassa eri kansoilla on ollut erilaisia tapoja merkitä lukumääriä ja suorittaa niillä laskutoimituksia. Monet näistä eroavat suuresti omastamme, jotkut vain pienten detaljien kuten merkkisymbolien osalta, mutta toiset ovat perusteitaan myöten erilaisia. Tällöin laskutoimitukset ja jopa käsitys luvuista ovat tyyten meistä poikkeavat.

Länsimaissa matematiikka toimi tärkeänä voimana tieteellisen ja teollisen vallankumouksen aikana, mutta viime aikoina on herätty huomaamaan että matematiikan historia ei ole lainkaan näin eurooppakeskeistä (Selin 2000, xvii). Kreikkalaisetkin perivät matemaattisen osaamisensa egyptiläisiltä sekä babylonialaisilta, ja jopa nykyiset numeromerkkimme ovat intialaista alkuperää ja saapuneet Eurooppaan arabien mukana.

Matemaattisten keksintöjen syntymistavoista asiantuntijat ovat kiistelleet kahden eri teorian välillä. Nämä teoriat ovat riippumattomien keksintöjen teoria ja diffuusioteoria. Riippumattomassa teoriassa keksinnöt on keksitty useaan kertaan eri puolilla maailmaa, kun taas diffuusiteoriassa ne ovat levinneet yhdestä alkukeskuksesta (Flegg 2002, 25).

Barrow asettuu diffuusiteorian kannalle ja korostaa korkeakulttuurien merkitystä näiden keksintöjen levittäjinä (Barrow 1999, 150).
Merkittäviä matematiikan eteenpäin viejiä ovat olleet korkeakulttuurit muun muassa Egyptissä, Kaksoisvirran alueella, Kiinassa, Välimeren alueella ja Etelä- sekä Väli-Amerikassa. Fleggin mukaan laskujärjestelmän tehokkuudella on merkittävä yhteys sivilisaation mahdollisuuksiin kehittyä, ja tästä syystä tehokkaimmat laskujärjestelmät leviävät nopeasti syrjäyttäen vanhat ja tehottomammat tieltään (Flegg 2002, 48). Haapasalo (1993a, 4–5) kritisoi koulujen matematiikanopetusta sen historiallisen luonteen unohtamisesta painottaen sitä, että tämän kehitysprosessin tunteminen on tärkeä osa matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin kehittymisen ymmärtämistä. Liitteessä 7 on kiinnostuneelle lukijalle kuvailtu murtolukujen ja lukujärjestelmien kehittymisprosessia tarkemmin.

2.1. Lukujärjestelmien nykyaikainen määritelmä

Nykyään kymmenjärjestelmä on lyönyt itsensä läpi verrattuna muihin tehottomampiin lukujärjestelmiin. Tärkeintä ei kuitenkaan ole juuri kymmenen käyttäminen kantalukuna, vaan se että kyseessä on täydellisesti koodattu paikkajärjestelmä, jossa merkin arvon määrää sen paikka. Koodaus tarkoittaa sitä, että jokaiselle merkille 0-9 on oma merkintänsä ja paikkamerkintä sitä, että merkin arvo riippuu sen sijainnista. (Luoma-aho 2010, 7). Esimerkiksi ranskalainen Georges Buffon esitti 1700-luvulla, että desimaalijärjestelmä tulisi korvata *duodesimaali*– eli 12-järjestelmällä. Tämä auttaisi erityisesti murtolukujen laskutoimituksissa, sillä 12 voidaan jakaa puolikkaaseen, kolmanneksiin ja neljänneksiin ilman murtolukujen käyttöä (Barrow 1999, 93–94).

Käyttämämme lukujärjestelmän luvut voidaan määritellä useammalla tavalla. Yksi tapa on konstruoida ne toisiinsa sisältyvien lukujoukkojen avulla. Positiiviset kokonaisluvut ja nolla muodostavat *luonnollisten lukujen joukon* $\mathbb{N}$. Kahden luonnollisen luvun summa on aina luonnollinen luku. Kuitenkin jos halutaan ottaa laskutoimituksista mukaan myös vähennyslasku, tarvitsee lukualuetta laajentaa, sillä esimerkiksi vähennettäessä viisi kolmesta on tuloksena negatiivinen luku -2, joka ei kuulu luonnollisiin lukuihin. Kun luonnollisiin lukuihin lisätään niiden vastaluvut, saadaan *kokonaislukujen joukko* $\mathbb{Z}$. Kertolaskun mukaan ottamiseksi lukualuetta ei tarvitse laajentaa, mutta jaettaessa kokonaisluku toisella kokonaisluvulla on mahdollista, että tuloksena ei olekaan kokonaisluku vaan murtoluku. Esimerkiksi neljä jaettuna viidellä on 45. Luvut, jotka voidaan esittää muodossa ⍰⍰ siten, että m ja n ovat kokonaislukuja ja n$\neq 0$, muodostavat *rationaalilukujen joukon* $\mathbb{Q}$. Kaikki rationaaliluvut voidaan ilmaista joko päättyvinä desimaalilukuina (esimerkiksi 32,76) tai päättymättöminä jaksollisina desimaalilukuina (esimerkiksi 6,161616... eli 0,16) (Malaty 2003, 34–37). Lisäksi on olemassa *irrationaalilukuja* kuten 2 tai ⍰. Niitä ei voida ilmaista päättyvinä desimaalilukuina (Malaty 2003, 13–14). Nämä kaikki yhdessä muodostavat *reaalilukujen joukon* $\mathbb{R}$. Reaalilukujen joukkoa voidaan kuvata esimerkiksi yhtenäisellä lukusuoralla.

Lukualuetta voidaan laajentaa vielä *kompleksilukujen joukoksi* $\mathbb{C}$, jota voidaan havainnollistaa kompleksitasolla. Tämä ei kuitenkaan kuulu peruskoulun oppimäärään, joten sitä ei käsitellä tässä sen tarkemmin.

Luvut voidaan määritellä myös aksiomaattisesti. Tämä ajattelutapa on peräisin antiikin Kreikasta. Siinä tiettyjen oletusten (aksioomien) pohjalta johdetaan lukujen ominaisuudet logiikan päättelysääntöjen avulla. (Reaalilukujen aksioomat, katso esimerkiksi Myrberg 1978, 189-200).

Lukujärjestelmien historiassa niiden kehittyminen on liittynyt käytännön esimerkkeihin. Renessanssin vapauttama ajattelu nosti matematiikan kuitenkin uuteen lentoon, jolle oli tunnusomaista abstraktisuus. Esimerkiksi luku ”3” ei matemaatikoilla liity enää mihinkään kolmen kappaleen joukkoon, vaan luvut ovat sellaisten muunnosprosessien tulosta, joiden tarkoituksena on tuottaa luvuille niiden seuraajat. Lukujen perusolemus ei siis palaudu lukuihin itseensä, vaan niiden välisiin relaatioihin. (Barrow 1999, 150-151).

2.2. Murtoluvut

Murtoluvuissa olennaista on kokonaisen jakaminen osiin. Desimaaliluvut, prosenttiluvut ja suhteet ovat tästä syystä läheisesti kytköksissä murtolukuihin. Murtoluku voidaan merkitä rationaaliluvun tapaan murtoviivaa käyttäen. Tällöin murtoviivan alle merkitään nimittäjä *(denominator)*, joka kertoo kuinka moneen osaan kokonainen on jaettu. Murtoviivan ylle merkitään osoittaja *(numerator)*, joka kertoo kuinka monta tällaista osaa on otettu. Päättyvät desimaaliluvut ovat tapa ilmaista murtolukuja, joissa nimittäjänä on kymmenen potenssi. Yksi prosentti merkitsee yhtä sadasosaa.

Aidot murtoluvut (*proper fraction*) ovat arvoltaan ykköstä pienempiä. Esimerkiksi *66* tai *54* ovat ei-aitoja murtolukuja (*improper fractions*) (Malaty 2003, 29). Ykköstä suuremmat murtoluvut voidaan ilmaista sekalukuna (*mixed number*), jolloin kyseessä on kokonaisluvun ja murtoluvun summa (esimerkiksi 2 + *34* = *234*). (Skypek 1984, 11). Yksikkömurtoluvut (*unit fraction*) ovat lukuja, joissa osoittajan arvo on 1, esimerkiksi *1189*.

Kaikki rationaaliluvut ovat esitettävissä murtolukumuodossa, mutta kaikki murtoluvut eivät ole rationaalilukuja. Esimerkiksi □*2* on murtoluku, mutta ei rationaaliluku (Lamon 1999, 28). Kaikki kokonaisluvut voidaan ilmaista murtolukuina, esimerkiksi 5 = *5 1* (Malaty 2003, 28). Strang käyttää ekvivalenttien murtolukujen luokittelussaan Polisin määritelmää. Jokainen luku R = [a,b] edustaa järjestettyjen parien ryhmää. Murtoluvulla □□ on äärettömän monta nimeä, ja se voidaan esittää äärettömän monella eri tavalla. Esimerkiksi murtoluku *12* voidaan esittää muodoissa *24*, *36*, *48*, …, □*2*□. (Strang 1989, 22). Murtoluku voidaan muuttaa ekvivalentiksi parikseen laventamisen (*expanding*) tai supistamisen (*cancelling*) avulla. Tällöin sen suuruus ei muutu. Esimerkiksi lavennettaessa *32* kahdella saadaan *64*, ja supistettaessa *64* kahdella palataan muotoon *32*. Yksinkertaistettu (*simplified*) rationaaliluku tarkoittaa sellaista rationaalilukua, jonka termien ainoa yhteinen tekijä on 1 (Malaty 2003, 21). Tällainen murtoluku ei ole supistettavissa.

3. Matematiikan oppiminen ja opettaminen

Matematiikan opettaminen ja oppiminen on monitahoinen asia, joka liittyy useampaan osakokonaisuuteen. Aloitan tarkastelun pohtimalla itse matematiikan käsitettä. Malaty (2003, 67) määrittelee matematiikan deduktiiviseksi rakennelmaksi, jossa yhdestä tai useammasta lauseesta johdetaan uusia lauseita. Matemaattiset käsitteet pätevät ideaalisessa maailmassa, ja niiden hahmottamista helpottavat kuviot ovat vain apuneuvoja ajattelumme tueksi (Malaty 2003, 25–26). Matemaattisia abstraktioita esitetään symbolien avulla (emt. 101). Matematiikalla on vahva yhteys muihin luonnontieteisiin, erityisesti fysiikan ja kemian laskuihin. Leino kuitenkin varoittaa näkemästä matematiikkaa vain laskemisen apuvälineenä. Hän vertaa sitä yhtä suppeaksi näkemykseksi, kuin nähdä lukutaito vain kirjainten tuntemisena tai tietotekniikka pelkkänä näppäintekniikkana (Leino 1992, 42). Schweigerin mukaan matematiikan hajanaisuutta kuvastaa useamman eri matematiikkakulttuurin olemassaolo, ja hän luettelee seuraavat esimerkit: arkipäivän matematiikka, matemaattisten sovellusten hyödyntäminen, koulumatematiikka sekä matematiikka tieteenä (Schweiger 2006, 63).

Tämän tutkimuksen kannalta olennaisen edellisistä asioista on tietenkin koulumatematiikka. Hassisen mukaan peruskoulun alkuaikoina matematiikan opetuksessa lähtökohtana oli tieteellinen matematiikka. 1980-luvulla arkipäivän matematiikka korostui, ja matematiikka alettiin nähdä enemmän työvälineenä. (Hassinen 2006, 133). Sekä Kaasila (2000, 1) että Malaty (2003, 39) tuovat esille sen ongelman, että suomalaisessa koulujärjestelmässä korostetaan liikaa laskemista ymmärryksen kustannuksella. Tossavainen kysyy jopa, pitäisikö Suomessa erottaa laskentopainotteinen arkipäivän ongelmanratkaisu oppiaineena todellisesta matematiikasta esimerkiksi viidenneltä luokalta lähtien (Tossavainen 2008, 24). Malaty kritisoi Pehkosen ja Zimmermanin näkemystä, jonka mukaan ”koulumatematiikka ei ole matematiikkaa, vaan yleissivistävä oppiaine, jota kutsutaan matematiikaksi” (Malaty 2004, 105). Malatyn mukaan muun muassa visualisoinnilla ja sopivien tehtävien valinnalla ja esittämistavalla voidaan lapsille ensimmäisestä luokasta lähtien opettaa ajattelua, joka perustuu matemaattisiin struktuureihin (Malaty 2004). Matemaatikkojen ja kasvatustieteilijöiden keskustelussa on nähtävissä ongelmana erilainen käsitys käsitteen ´ymmärrys´ määrittelystä. Kasvatustieteilijät tarkoittavat tällä useimmiten kykyä liittää matemaattinen osaaminen arkielämään tai sovelluksiin, kun taas matemaatikoille ymmärrys tarkoittaa matemaattisten struktuurien hallintaa. Keskustelusta tuskin saadaan hedelmällistä, ennen kuin tämä kielenkäytön eroavaisuus saadaan ratkaistua. Voidaan sanoa, että matemaatikot haluavat lapsen ajattelun taipuvan matematiikan rakenteisiin sopivaksi, kun taas pedagogit tahtovat muokata matematiikkaa lapsen ajatteluun sopivaksi.

Keskustelua on myös herättänyt aihe kenen kuuluisi opettaa matematiikkaa alakoulussa. Monien matemaatikkojen mielestä vain aineenopettajan pätevyys antaa riittävät aineenhallinnan taidot, jotka ovat heidän mielestä oleellisia opetuksen kannalta (Martio 2007, 30; Päivärinta & Näätänen 2006, 5). Perkkilä vastaa tähän argumentilla, että opettajalle ei riitä aineenhallinta, vaan että hänen on myös ymmärrettävä oppimisprosessin luonne (Perkkilä 2002, 36). Thames ja Ball toteavat useiden tutkimusten perusteella, että peruskoulutasolla opettajien matemaattiset opinnot eivät korreloi oppilaiden menestymisen kanssa, ja lukiotasollakin niiden ennustavuus on heikkoa (Thames & Ball 2010, 221). Brown et al. mukaan opettajan laajoilla matemaattisilla opinnoilla oli jopa negatiivinen korrelaatio oppilaiden tuloksiin. Syyksi mainittiin matematiikan syventävien opintojen kaukaisuus peruskoulussa opetettavista käsitteistä sekä se, että opettajilla ei ole kykyä selittää opetettavan asian sisältöä. Sen sijaan jatkokoulutus työelämän aikana paransi oppimistuloksia. Tähän syyksi opettajat kertoivat lisääntyneen ymmärryksen oppilaiden ajattelusta sekä lisääntyneen innostuneisuuden matematiikan opettamiseen. (Brown et al. 1997, 126–127). Kerannon tutkimuksessa opettajan aineenhallinta osoittautui tarpeelliseksi, mutta ei yksinään riittäväksi tekijäksi oppilaiden virheellisten vastausten analysoimisessa (Keranto 2004, 194).

3.1. Matemaattisen käsitteen määrittely ja oppiminen

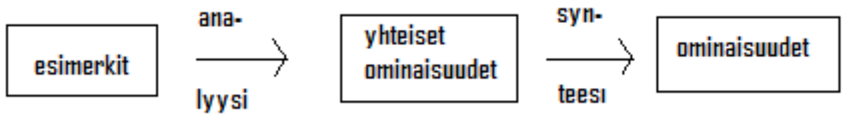
Käsitteiden määrittely on aina vaikeaa, mutta erityisesti käsitteen ”käsite” määrittely tuottaa ongelmia. Runsaasta pohtimisesta huolimatta käsitteelle ei ole syntynyt yksiselitteistä määrittelyä. (Silfverberg 1999, 66). Klassisen näkemyksen mukaan käsite on nähty ”entiteetiksi, joka saa merkityksensä sen kaikissa esimerkkitapauksissa havaittavien yhteisten ominaisuuksien kautta” (Silfverberg 1999, 67). Täten yksittäisistä esimerkkitapauksista voidaan yksikäsitteisesti sanoa, kuuluvatko tai ovatko ne kuulumatta käsitteen piiriin. Silfverbergin (1999, 67) mukaan tällainen määritelmä sopii hyvin abstrakteille yksikäsitteisille määritelmille, jollaisia matemaattiset määritelmät ovat. Haapasalo pohtii matemaattista käsitteenmuodostusta lapsen ajattelun kannalta. Hänen mukaansa matemaattinen ajattelu edellyttää, että lapsella on reaali- tai kuvitteellisessa maailmassa esiintyville luokille jokin älyllinen kuva, jota nimitetään käsitteeksi. Käsitteen merkitys lapselle riippuu siitä, minkälaisia kokemuksia, uskomuksia, tunteita, määritteitä jne hän siihen liittää. (Haapasalo 1992, 5).

Silverberg (1999, 66) esittelee Smithin kolme perustehtävää käsitteiden käytölle ajattelussa:

- kognitiivinen ergonomia eli käsiteltävän tiedon määrä vähenee
- menneen ajan välittäminen nykyisyyteen
- induktiivinen päättely

Silfverbergin (1999, 75) mukaan käsitteen oppimiseen liittyy kolme merkittävää komponenttia: Itse käsite, käsitteen esimerkit ja käsitteeseen liittyvät ominaisuudet. Hän esittää kaavion käsitteen oppimisen prosessista. Käsitteen oppija tekee täten induktiivisia yleistyksiä esimerkkitapauksista ja muodostaa yhteisten ominaisuuksien pohjalta synteesin käsitteen ominaisuuksista:

KUVIO 1: Käsitteen oppiminen I (Silfverberg 1999, 75).



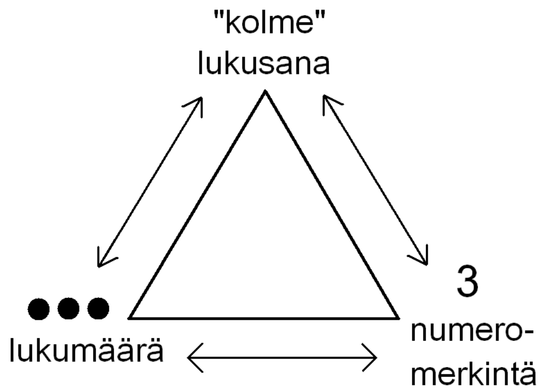
Matemaattinen tieto jaetaan usein proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietämykseen. Haapasalon (2004, 124) luokittelussa konseptuaalinen tietämys merkitsee ymmärrystä esimerkiksi matemaattisista käsitteistä, säännöistä, algoritmeista ja proseduureista, kun taas proseduraalinen tietämys on näiden sääntöjen ja algoritmien hyödyntämistä menestyksekkäästi. Hihnala esittää saman vertaamalla proseduraalista tietoa ennalta määrättyihin ohjeisiin, jotka suorittamalla saadaan tehtävä suoritettua. Konseptuaalisen tiedon avulla voidaan konstruoida polkuja, joita pitkin kulkemalla päästään samaan tilanteeseen. (Hihnala 2005, 29).

Tässä tutkimuksessa käsitteen täydellisen ymmärtämisen vaatimuksena on se, että sekä kyseistä käsitettä koskeva konseptuaalinen että proseduraalinen tieto on hallittu. Mikäli oppilas osaa suorittaa laskun $2 \cdot 49$ mekaanisena laskusääntönä ”kerro ylempi luku kahdella” ymmärtämättä perusteluja operaatiolle ja kykenemättä selittämään niitä, hallitsee hän proseduraalisen tiedon mutta ei konseptuaalista. Toisaalta jos hän ymmärtää luvun 49 käsitteen ja sen että niitä on otettava kaksi kappaletta, mutta ei saa annettua oikeaa vastausta, hallitsee hän vain konseptuaalisen tiedon mutta ei proseduraalista. Barnby & al. (2007, 41-42) pohtivat ymmärtämisen käsitettä matematiikassa, ja päätyvät erottamaan instrumentaalisen ja syvällisen ymmärtämisen toisistaan. Syvällistä ymmärtämistä he kuvailevat toiminnalla, jossa oppilas ”tietää mitä tekee ja miksi”, mutta instrumentaalinen ymmärrys on vain ”sääntöjä ilman ymmärrystä”. ***Täyttääkseen tämän tutkimuksen vaatimukset käsitteen ymmärtämisestä, oppilaan on pystyttävä suorittamaan sekä kysytty (lasku)toimitus että osoitettava toimituksen takana tapahtuvan ajattelun hallinta***. Tämä vastaa Hannulan, Maijalan ja Pehkosen (2004, 142) näkemystä heidän sanoessaan, että matematiikka on yhdistelmä laskutaitoa ja matemaattista ajattelua, mutta kumpikaan yksinään ei riitä kuvailemaan matemaattista osaamista.

3.2. Teorioita matematiikan oppimisesta

Sinnemäen mukaan lapsen matemaattisen käsitteen oppiminen on pitkä fyysisen ja sosiaalisen ympäristön vuorovaikutuksessa syntyvä prosessi, joka alkaa jo ennen kouluikää. Sinnemäki erottaa luvun käsitteen omaksumisessa kolme eri elementtiä seuraavan useiden tutkijoiden käyttämän kolmiomallin avulla:

KUVIO 2: Luvun käsitteen ominaisuudet ja niiden väliset yhteydet (Sinnemäki 1998, 126).



Lukuun liittyy konkreetin materiaalin tai kuvan avulla esitetty yhteys lukumäärään, luvun verbaalinen esitys sekä luvun symbolimerkintä eli numeromerkki. Näiden omaksuminen voi tapahtua eriaikaisesti ja vaihtelevassa järjestyksessä, mutta luvun käsitteen ymmärtämiseksi on välttämätöntä hallita ne kaikki sekä niiden väliset yhteydet. (Sinnemäki 1998, 126).

Resnick jakaa matematiikan kolmeen eri alueeseen: oikea matematiikka (*math math*), koulumatematiikka (*school math*) ja katumatematiikka (*street math*). Oikea matematiikka on sitä, mitä matemaatikot harjoittavat työkseen, koulumatematiikka koulussa opiskeltavaa matematiikkaa ja katumatematiikka arkielämän tilanteissa opittua epämuodollista matemaattista päättelyä. Katumatematiikka on saanut nimensä tiettyjen etnisten tai sosiaalisten ryhmien, esimerkiksi brasilialaisten katulasten, harjoittamasta matemaattisesta toiminnasta esimerkiksi kaupankäynnin yhteydessä. Tutkijat ovat todenneet, että he käyttävät tässä yhteydessä matemaattisia toimintoja, mutta eivät pysty yhdistämään niitä koulumaailmaan ja selviävät huonosti kirjallisista tehtävistä. (Hassinen 2006, 20). Matematiikan kouluopetukselle tämä tarjoaa tärkeän haasteen siitä, kuinka kouluopetuksen asiat eivät jäisi irrallisiksi, vaan oppilaat pystyisivät hyödyntämään niitä arkielämässään.

3.2.1. Piaget

Sveitsiläinen psykologi Jean Piaget kehitti 1900-luvun puolivälissä kognitiotutkimuksen perusteella oppimisteorian, joka perustuu lapsen eri ikäkausiin. Vasta kun lapsen kognitiiviset kyvyt ovat riittävät, voi hän nousta seuraavalle tasolle. Kognitiiviset kyvyt on perinteisesti nähty hermostollisen kypsymisen ja ympäristön vaikutuksen yhteistyönä. Piaget lisäsi tähän kolmannen tekijän, tasapainottumisen. Ulkoisten tekijöiden aiheuttaessa disharmoniaa yksilön olemassa olevien skeemojen välille, pyrkii yksilö adaptoitumaan. Tämä on se prosessi, joka saa aikaan ajattelun kehittymistä. (Vornanen 1984, 8-9; Schunk 2009, 337). Yksilö käyttää konfliktin tasapainottamiseen kahta menetelmää: assimilaatiota ja akkomodaatiota. Assimilaation avulla ulkoinen todellisuus sopeutetaan olemassa oleviin kognitiiviisiin struktuureihin, ja akkomodaation yhteydessä sisäiset struktuurit muuttuvat sopeutuen ulkoiseen todellisuuteen (Schunk 2009, 338).

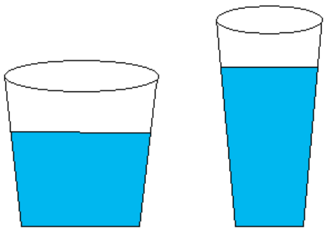
Piaget´n mukaan kehityskausien ikärajoissa esiintyy toki henkilökohtaista vaihtelua, mutta pääosin kehitys noudattaa samoja linjoja kaikilla. Jokainen vaihe toimii pohjana seuraavalle. (Vornanen 1984, 10). Piaget painotti lapsen omaa toimintaa sekä konkreettisten välineiden ja esineiden käyttöä osana opetusta (Lindgren 1990, 62). Piaget´a pidetäänkin yhtenä merkittävimmistä tutkijoista konstruktivismin kehittymisessä (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 118; Schunk 2009, 235).

Piaget neljä tasoa ovat seuraavat (Copeland 1974, 24–31; Bell, Costello & Küchemann 1983, 52–54):

1) Sensomotorinen kausi
2) Esioperationaalisten toimintojen kausi
3) Konkreettisten operaatioden kausi
4) Formaalien operaatioiden kausi

Sensomotorinen kausi ajoittuu syntymisestä noin kahden vuoden ikään (Copeland 1974, 25). Esioperationaalisella kaudella lapsi alkaa käyttää symboleja ajattelun tukena, esimerkiksi sanoja kuvaamaan asioita. Tämä kausi kestää noin seitsemän vuoden ikään. (Copeland 1974, 26). Lapsi pystyy suorittamaan opittuja toimintoja, mutta ei välttämättä esittämään tapahtunutta mielessään (Vornanen 1984, 14). Konkreettisten operaatioden kaudella alkaa lapsen loogis-matemaattinen päättely, mutta toimitukset on suoritettava konkreettisten esineiden avulla. Tunnettu Piaget´n esimerkki tämän tason saavuttamisesta on kahden lasin testi. Kun lapsi ymmärtää että nestemäärä säilyy samana kaadettaessa se lasista toiseen, on hän ymmärtänyt määrän säilymisen periaatteen ja saavuttanut konkreettisten operaatioiden tason. (Copeland 1974, 26-27; Bell, Costello & Küchemann 1983, 52). Vastaava koe voidaan tehdä kaatamalla lasiin määrällisesti mitattavia esineitä, esimerkiksi helmiä. Tällöin voidaan testata lukumäärän säilymisen ymmärtämistä. (Vornanen 1984, 20).

KUVA 1: Piaget´n formaalien operaatioden kauden testi.



Formaalien operaatioden taso saavutetaan yleensä noin 12-15 ikävuoden vaiheilla (Vornanen 1984, 10). Lapsi pystyy operoimaan symboleilla ja ideoilla ilman konkreettien esineiden apua (Vornanen 1984, 16). Ajatteluskeemojen muuttumisen myötä tätä tasoa voidaan kutsua myös hypoteettis-deduktiiviseksi vaiheeksi.

Vaikka monet Piaget´n kokeet olivat uraauurtavia, noudattelee hänen teoriansa murtolukujen oppimisesta perinteistä pintamalleihin perustuvaa käsitystä. Hän aloittaa prosessin kuvailun hyvin nuorista lapsista. Piaget painottaa konkreettisten esimerkkien käyttöä. Kokonainen jaetaan ensin kahteen, sitten useampaan osaan. Ensimmäinen vaihe on tasajaon vaatimus, mikä nuorimmille lapsille voi olla ylivoimaista. Myös määrän säilymisen ymmärtäminen on ehdoton edellytys murtolukukäsitteen ymmärtämiselle. (Copeland 1974, 153–159) Koska Piaget´n kuvaukset murtolukujen oppimisesta keskittyvät hyvin nuoriin – pääosin alle kouluikäisiin – lapsiin, ne eivät täysin kuvaa tämän tutkimuksen tilannetta, vaan enemmänkin toimintoja jotka on pitänyt suorittaa aiemmin, jotta saavutetaan tämän tutkimuksen vaatima ajattelun taso.

3.2.2. Dienes

Unkarilaissyntyinen Zoltan Dienes on yksi Piaget´n ajatusten huomattavimmista kehittäjistä. Piaget´sta poiketen hän keskittyi vain matematiikan oppimisen tutkimiseen (Lindgren 1990, 64; Post 1988, 8). Matemaattisia ideoita kuvastavia konkreettisia materiaaleja ja sopivia ajatusmalleja käyttäen hän uskoi lähes kaikkien oppilaiden voivan omaksua myös monimutkaisia matemaattisia ajatuksia (Hirstein 2007, 169). Dienes kehittikin sekä konkreettisia välineitä että symbolisia merkintätapoja, jotka tuovat matemaattiset ajatukset ymmärrettäviksi oppilaille. Näistä voidaan mainita esimerkiksi paikkajärjestelmän toimintaa havainnollistava Multibase Arithmetic Blocks, joka toimii kymmenjärjestelmävälineiden tapaan, mutta myös muissa lukujärjestelmissä. Loogisissa paloissa (*The Logic Blocks*) esineiden ominaisuuksia (muotoa, väriä, kokoa, yms.) voidaan muutella ja täten harjoitella esimerkiksi matemaattisen logiikan päättelysääntöjä (Hirstein 2007, 170; Opperi 2010). Tutkimuksissa hänen metodinsa on kuitenkin todettu auttavan erityisesti matemaattisesti lahjakkaita oppilaita (Lindgren 1990, 66).

Dienes kokosi näkemyksensä matematiikan oppimisesta neljäksi periaatteeksi. Nämä ovat

1) Konstruktivismin periaate (*construction principle*)
2) Matemaattisen varioinnin periaate (*multiple embodiment principle*)
3) Havainnon varioinnin periaate (*perceptual variation principle*)
4) Dynaamisuuden periaate (*Dynamic principle*)

(Lindgren 1990, 67-70; Sriraman & English 2005, 258).

Dienesille on tärkeää asioiden variointi sekä havaintojen että niiden takana sijaitsevan matemaattisen käsitteen suhteen. Kun epäoleellisia seikkoja muutetaan hiukan, nousee oleellinen esiin. Havainnoimalla tätä muutosta pystyy oppija muodostamaan yleisiä sääntöjä esillä olevasta asiasta. Omien kokemusten ja dynaamisuuden korostamisessa Dienes on Piaget´n kanssa samoilla linjoilla ja toimii yhtenä konstruktivismin käynnistäjistä. Dienes korosti myös leikin ja pelien merkitystä matematiikan oppimisessa. Hän jakoi oppimisprosessin kuuteen vaiheeseen:

1) Vapaa leikki (*free play*)
2) Sääntöjen luominen (*play be rules*)
3) Vertailu (*comparison*)
4) Kuvallinen esittäminen (*representation*)
5) Symbolisaatio (*symbolization*)
6) Formalisaatio (*formalization*)

(Lindgren 1990, 70–72)

Dienes rakasti matematiikan kauneutta, ja hän painotti sen opiskelun merkitystä oppijan persoonallisuuden kehittymisen kannalta, ei niinkään jatko-opiskelujen tai työelämässä pärjäämisen takia (Post 1988). Hänen mielestään opettajan yksi tehtävä on tuoda oppilaiden ulottuville materiaalia, joka on isomorfista opetettavan matemaattisen käsitteen kanssa. Alun vapaan leikin jälkeen matemaattiset säännönmukaisuudet alkavat hahmottua, ja syntyy tarve luoda käsitteestä erilaisia kuvallisia representaatioita ja ottaa käyttöön käsitteitä kuvaava symbolijärjestelmä. Viimeisessä formalisaation vaiheessa käsitteestä muodostetaan kaikki mahdolliset seuraukset. Opetusmenetelmissään Dienes kuitenkin painotti sitä, että symbolimerkintöihin ei pitäisi siirtyä liian aikaisin, vaan tärkeintä on ensin opetella ymmärtämään käsite, jota symboli edustaa (Hirstein 2007, 169).

3.2.3. Konstruktivismi

Aiemmin kasvatustieteissä oli vallassa behavioristinen oppimisnäkemys, jossa koulu jakaa oikeaksi ja tärkeäksi katsomaansa tietoa. Oppilaiden tehtävänä oli vastaanottaa tämä tietoaines. (Sinnemäki 1998, 99). Oppiminen perustui luonnontieteellisen käyttäytymiseen tutkimukseen, ja sen katsottiin olevan sama kaikilla ihmisillä. Oppimisen katsottiin olevan ärsyke-reaktio –ketjujen vahvistamista. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 111, 151).

Nykyään tästä on siirrytty konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, joka korostaa oppijan omaa roolia ja aktiivisuutta. Yksilö toimii omien ennakkokäsitystensä varassa, ja uusi opittu tieto liittyy aina edeltäviin rakennelmiin (Ruokamo 2000, 40). Kuparin mukaan ihminen nähdään aktiivisena oman tietonsa rakentajana, ja yksilö konstruoi oman subjektiivisen todellisuutensa (Kupari 1999, 35). Paasonen esittää behaviorismin ja konstruktivismin eron matematiikan oppimisessa siten, että behaviorismissa laskutaito on edellytys ymmärtämiselle, kun taas konstruktivismissa ymmärrys on edellytyksenä laskutaidolle (Paasonen 1993, 169).

Konstruktivismi ei kuitenkaan ole yksi yhtenäinen tutkimussuunta, vaan se on jakautunut useampaan eri näkemystä edustavaan haaraan. Perkkilän mukaan kaksi päähaaraa ovat yksilöllinen ja sosiaalinen konstruktivismi (Perkkilä 2002, 25). Ernestin jaottelu on vielä tarkempi sisältäen neljä pääluokkaa, jotka ovat heikko (*simple*) konstruktivismi, radikaali (*radical*) konstruktivismi, enaktivismi (*enactivism*) ja sosiaalinen (*social*) konstruktivismi. Heikko konstruktivismi hyväksyy todellisuudesta saatavan empiirisen tiedon mahdollisuuden radikaalin konstruktivismin kieltäessä tämän. Enaktivismi painottaa yksilön vuorovaikutusta (fyysisen) ympäristön kanssa, kun taas sosiaalinen konstruktivismi nimensä mukaisesti keskittyy juuri yksilön vuorovaikutukseen sosiaalisen ympäristönsä kanssa. (Ernest 2006, 4–5).

Konstruktivismin myötä kasvatustieteilijöiden ja matemaatikkojen välillä on herännyt keskustelua siitä, pitäisikö opetuksessa noudattaa matematiikan sisäistä rakennetta, vai luottaa vain oppijan omiin konstruktiohin. Yrjönsuuri vastaa tähän lähtemällä konstruktivismin vaatimuksista. Hänen mukaansa on lähdettävä siitä, miten tehtävän vaatimat ajattelun mallit sopivat ratkaisijan ikäkauteen, ja miten ne kehittävät häntä matemaattisesti (Yrjönsuuri 1993, 50). Malaty puolustaa matemaattislähtöistä katsomustapaa. Matemaattisten struktuurien puuttuminen opetuksesta johtaa puutteisiin täytettäessä jatko-opiskelupaikkoja matemaattisilla aloilla. Malatyn mukaan matematiikka on kouluopetuksessa ainoa aine, joka voi kehittää lapsen ajattelua siten, että hän voi saavuttaa Piaget´n formaalien operaatioiden kauden. Täten matemaattista sisältöä ei saa supistaa pelkäksi mentaaliksi aritmetiikaksi, mekaanisiksi taidoiksi ja arkipäivän matematiikaksi jottei tämä kehitys jäisi tapahtumatta. (Malaty 2007, 422).

Björkqvist tarkastelee konstruktivismia arvioinnin kannalta. Radikaalin konstruktivismin mukaan kielletään objektiivisen todellisuuden olemassaolo, ja siitä syystä myös objektiivista todellisuutta koskevan tiedon arviointi ja arvostelu on mieletöntä. Björkqvist näkee ratkaisun sosiaalisessa konstruktivismissa. Joukolla ihmisiä on yhteinen näkemys todellisuudesta (*collective knowledge*), ja yksilön osaamisen arviointi perustuu siihen, kuinka hänen käsityksensä vastaa yleistä käsitystä. (Björkqvist 1994, 19–20). Myös Virta näkee vaikeuksia kognitiivis-konstruktivistisen paradigman mukaisessa arviointikeskustelussa. Virran mukaan konstruktivistisessa näkemyksessä vaaditaan perinteistä behaviorismia vaativimpia ajattelun taitoja, joiden mittaaminen on opettajalle hankalaa. Hän päätyy näkemykseen, että arvioinnissa täytynee päätyä paradigmat integroivaan ajattelutapaan. (Virta 1999, 14-15).

3.3. Murtolukujen oppiminen

Verrattuna kokonaislukuihin murtoluvun määritelmä on erittäin monitahoinen, ja siten abstraktisuudessaan vaikea hahmottaa oppilaille, kun he kohtaavat sen ensimmäistä kertaa (Novillis 1976, 131; Driscoll 1984, 34; Riddle & Rodzwell 2000, 202). Ball on vetänyt yhteen useita eri tutkimuksia rationaalilukujen luonteesta, ja toteaa murtolukujen voivan edustaa a) osaa kokonaisesta b) lukua lukusuoralla c) suureen mitta-arvoa d) kahden tekijän osamäärää e) lukumäärää f) suhdetta sekä g) kuvausta todennäköisyydelle (Ball 1990, 11). Lisäksi kouluun tullessaan lapsilla on runsaasti informaalia osaamista erityisesti kokonaisluvuista, mille perustalle opettaja voi rakentaa opetuksensa. Oppilailla ei kuitenkaan ole vastaavaa osaamista murtoluvuista, ja Post et al. (1993) mukaan heidän tietämyksensä näyttää rajoittuvan puolikkaan ja neljäsosan intuitiiviseen hallintaan.

Vaikeutena on myös se, että aiemmin kokonaisluvuilla opetetut mallit ja toimintatavat eivät murtoluvuilla operoitaessa enää olekaan käyttökelpoisia (Lamon 2001, 152; Post et al. 1993). Esimerkiksi käy vaikka se, että kahden murtoluvun välissä on aina ääretön määrä muita murtolukuja, toisin kuin kokonaisluvuissa (Smith 2002, 9). Norton kuitenkin puolustaa murtolukujen oppimista kokonaislukuskeemojen kautta. Hänen mukaansa niissä on paljon yhteisiä toimituksia, mutta murtolukujen yhteydessä täytyy opetella murtolukujen kieli ja erityisesti kokonaisen yksikön sekä osan määritelmä (Norton 2008,405–406). Streefland käyttää termiä ”N-häiriö” (*N-Distractor*) puhuessaan samasta asiasta (Streefland 1991). Hän painottaa oman kielen kehittämistä murtoluvuille ottaen huomioon, että numeromerkit ja laskutoimitukset ovat jo käytössä kokonaislukujen yhteydessä (Streefland 1982, 235). Myös Behr ja Post (1992, 201) perustavat näkemyksensä murtolukujen opettamisesta kokonaislukuihin. He painottavat kokonaislukujen neljän peruslaskutoimituksen sekä mittaamistaitojen hyvää hallintaa ennen murtolukujen opettelua.

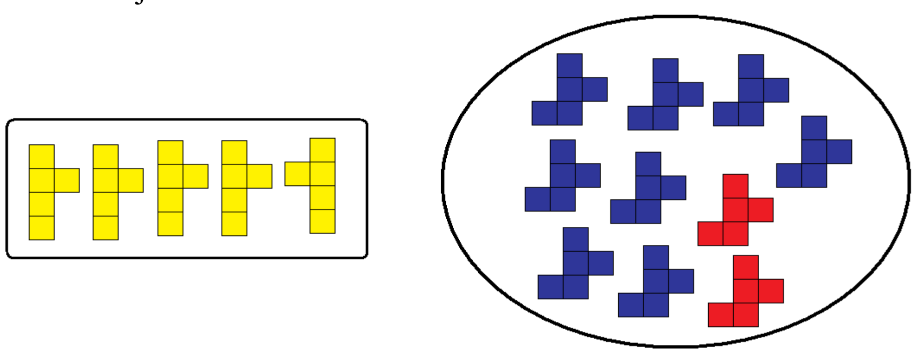
Murtolukujen kohdalla yksi hahmottamista vaikeuttava asia on se, että konkreettista mallia voidaan havainnollistaa kolmella eri tavalla, jotka poikkeavat suuresti toisistaan. Näitä tapoja Strang kutsuu malleiksi. Mallit ovat pinta-alamalli, joukkomalli ja lukusuoramalli. Pintamallit ovat erilaisia geometrisia kuvioita, joita jakamalla voidaan kuvata osa-kokonainen -suhdetta. Ne ovat suomalaisissa oppikirjoissa yleisimmin käytettyjä malleja. Joukkomallissa yhden kokonaisen muodostaa joukko yksittäisiä esineitä. Se on monissa tutkimuksissa todettu pinta-alamallia vaikeammaksi. Lukusuoramalli on vaikein malleista ja suomalaisissa oppikirjoissa vähän käytetty. Strangin mukaan lukusuoramallin vaikeutena on erityisesti se, että siinä kuvataan murtoluku pisteenä. (Strang 1989, 26). Kuitenkin murtoluku voidaan ilmaista toisella tapaa lukusuorapisteen lisäksi kahden pisteen välisenä välimatkana. Hihnalan mukaan ilmaistaessa luku lukusuoralla pisteenä se käsitetään objektiksi, ja mikäli se ilmaistaan välimatkana käsitellään sitä operaationa (Hihnala 2005, 29). Behr ja Post painottavat juuri murtoluvun ilmaiseman välimatkan merkitystä, ja sitä että tämä välimatka pitäisi pystyä erottamaan millä tahansa kohtaa lukusuora. Tämä taito on tärkeä esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskun havainnollistamisessa lukusuoralla. Lukusuoran hyödyllisyydestä huolimatta he eivät suosittele sitä ensimmäiseksi malliksi opetuksessa. (Behr ja Post 1992).

Strang kuvailee eri tutkijoiden näkemyksiä siitä, kuinka eri malleja tulisi käyttää opetuksessa. On mahdollista käyttää vain yhtä mallia kunnes murtolukukäsite on hyvin opittu. Yhdenmukaisen mallin käyttö on lapsen ajattelulle selkeää. Vasta yhden mallin hyvän oppimisen jälkeen pitäisi siirtyä muiden mallien käyttöön. Toisten tutkijoiden mielestä tämä rajoittaa murtolukukäsitteen syntymistä. Useamman mallin käyttöä puoltaa se, että tällöin pystytään harjoittelemaan siirtymistä yhdestä mallista toiseen. (Strang 1989, 26). Suurin osa tutkijoista on useamman mallin samanaikaisen käyttämisen kannalla, ja tähän päätyy myös Lamon, jonka mukaan opetuksessa on käytettävä useita eri malleja, jotka vaihtelevat ominaisuuksiltaan: muodoltaan, väriltään, sijainniltaan, (joukkomallissa) kappaleiden määrältään ja niin edelleen (Lamon 1999, 14; katso kuva 4 alla). Lamonin kolmannelta kuudennelle luokalle yltäneessä pitkittäistutkimuksessa useita malleja käyttäneet oppilasryhmät saavuttivat vertaisryhmää syvemmän ymmärryksen murtoluvun käsitteestä (Lamon 2001, 159–160). On myös huomioitavaa, että pintamallit sopivat tietynlaisiin esimerkkitehtäviin paremmin, kun taas toisiin sopivat joukko- tai lukusuoramallit (Bell, Costello & Küchemann 1983, 121).

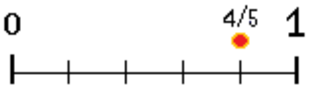
KUVA 2: Erilaisia malleja murtoluvusta *45*. (Pohjautuen Behr & Post 1992; Lamon 1999, 29–37).

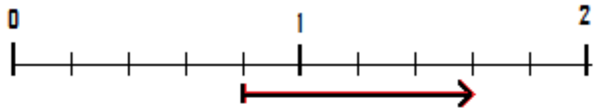
PINTAMALLI: Muodoltaan, kooltaan ja väriltään vaihtelevia kuvioita.

JOUKKOMALLI: Muodoltaan, kooltaan, määrältään, väriltään ja sijoittelultaan vaihtelevia joukkomallikuvioita.



LUKUSUORAMALLI: *45* lukusuorapisteenä ja välimatkana lukusuoralla.



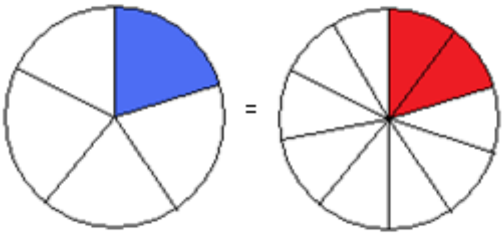


Murtolukujen abstraktin luonteen ja monitahoisuuden takia kasvatustieteilijät painottavat konkreettisten välineiden ja mallien tarvetta murtolukujen käsitteen ymmärtämiseksi ennen siirtymistä laskutoimitusten suorittamiseen. Käsitteen ymmärtämisen heikkous ja liiallinen laskujen painottaminen johtavat siihen, että pitkäaikaiset oppimistulokset jäävät heikoiksi (Suh 2005, 46–48). Lamonin mukaan tarvitaan sekä kuvallista että kielellistä päättelyä käsitteen haltuun ottamiseksi, jotta laskut eivät jäisi pelkäksi ”sokeaksi numeroiden pyörittelyksi” (Lamon 1999, 128). Yhtenä ongelmana tämänkaltaisen oppimiskäsityksen juurruttamiseksi on se, että opettajat opettavat usein siten, kuin he ovat itse oppineet. Mikäli opettajat ovat oppineet murtoluvut ulkoa opettelemalla merkityksettömien sääntöjen kautta, he usein myös opettavat niin (Laycock 1983, 41). Tästä syystä Lester vaatiikin kiinnittämään huomiota opettajankoulutukseen ja siihen, että tulevia opettajia opetetaan samoilla menetelmillä, millä he itse tulevat opettamaan (Lester 1984, 55).

Ensimmäinen perusasia murtoluvun käsitteen ymmärtämisessä on osa-kokonainen –suhde ja tasajaon vaatimus (Lamon 1999, 23,41; Ikäheimo & Voutilainen 2009, 8; Ellington & Whitenack 2010, 535). Jotta myöhemmin myöhemmin tehtävät suuruusvertailut ja laskutoimitukset tuottavat oikeita tuloksia, on lasten tässä vaiheessa ymmärrettävä, että murtoluvuista puhuttaessa kaikkien osien on oltava yhtä suuria (Saxe et al. 2007, 222). On myös erittäin tärkeää määritellä, mikä on yksi kokonainen yksikkö (*unit*), sekä käyttää vaihtelevasti useita erilaisia esimerkkejä erilaisista yksiköistä (Lamon 1999, 46-47; Haylock 2006, 148-150; Ikäheimo & Voutilainen 2009, 8). Behr ja Post (1992) ovat sitä mieltä, että pintamallit ovat helpompia oppia, joten osan ottaminen on aloitettava pintamalleilla. Osan ottaminen kokonaisesta on arkielämässä useimmiten tarvittu taito ja lisäksi se toimii perustana koko murtolukujen kielenkäytölle (Kieren 1983, 507; Haylock 2006, 156–158).

Murtolukujen yhtäsuuruus (*equivalence*) on tärkeä osa-alue, joka ei useinkaan oppilaille ole mitenkään itsestään selvää. Murtoluvuissa tämä liittyy supistamiseen ja laventamiseen. Nämä ovat tärkeitä toimituksia joille oppikirjoissa uhrataan runsaasti aikaa itsessään, ja lisäksi niitä tarvitaan laskutoimitusten yhteydessä. Ikäheimon ja Voutilaisen (2009, 18) mukaan oppilaille lause "supistettaessa ja lavennettaessa ei murtoluvun suuruus muutu" voi kuulostaa järjettömältä sanahelinältä. Tämän takia asia tarvitsee selkeää havainnollistamista konkreettisen tai kuvallisen mallin avulla. Tähän sopivat erityisen hyvin erilaiset pintamallit (Lamon 1999, 61; Ikäheimo & Voutilainen 2009, 15) sekä lukusuoramalli (Riedesel & Callahan 1977, 203).

KUVA 3: Murtolukujen ekvivalenssi.



1/5 = 2/10

Myös Post et al. painottavat murtolukujen yhtäsuuruuden merkityksen ymmärtämistä. He ovat sitä mieltä, että ennen laskutoimituksiin siirtymistä oppilaan käsitys murtoluvuista tulisi olla niin hyvä, että hän pystyy arvioimaan lopputuloksen suuruusluokan (Post et al. 1993, 340).

Murtolukujen laskutoimitusten osuus oppikirjoissa on vähentynyt aiemmasta. Osaltaan tähän on syynä desimaalilukujen ja prosenttilaskujen määrän lisääntyminen. (Galen et al. 2008, 63). Tämän kehityksen tulokset näkyvät Brownin, Küchemannin ja Hodgenin tutkimuksessa, jossa desimaalilukujen osaaminen oli kasvanut huomattavasti vuodesta 1970 vuoteen 2008, kun taas murtolukujen osaaminen oli heikentynyt (Brown, Küchemann & Hodgen 2010, 54). Desimaali- ja prosenttilaskut ovat käytännön elämässä laskutoimituksina usein murtolukulaskuja käytännöllisempiä. Monet murtoluvuilla suoritettavat koulutehtävät olisi luonnollista suorittaa desimaaliluvuilla. (Haapasalo 1993b, 76; Galen et al. 2008, 63). Galen et al. (2008, 63–64) näkevät murtolukujen opiskelun kuitenkin tärkeänä, sillä ne ovat läheisesti yhteydessä desimaali- ja prosenttilukuihin sekä niitä käytetään usein laskutoimitusten suorittamisessa, vaikka ne eivät olisi eksplisiittisesti näkyvissä. Murtoluvuilla operointi on tärkeää myös myöhempien matematiikan osa-alueiden kannalta, esimerkiksi rationaalilausekkeiden ja sitä kautta derivaatan käsitteen ymmärtämiseksi (Lamon 2001, 148).

Murtolukujen laskutoimituksissa on tärkeää lähteä hyvältä perustalta eli murtoluvun käsitteen tulee olla hyvin ymmärretty. Driscoll toteaa: ”Jotta voidaan käyttää murtolukuja, ne täytyy *ymmärtää”* [korostus originaalissa]. Hänen mukaansa tämä pätee kaikkiin oppilaisiin taitotasosta riippumatta. Opettajan mielestä välkky oppilas voi kyetä laskemaan murtolukuja niiden opettelun alusta lähtien, mutta vain murtoluvun käsitteen ymmärtäminen tuottaa pitkäaikaisia ja pysyviä oppimistuloksia. (Driscoll 1984, 34). Bell, Costello ja Küchemann varoittavat suuresta vaarasta ja houkutuksesta lähteä liian aikaisin laskemaan symbolimerkintöjä käyttäen. Tähän on syynä se, että pelkkiä symbolimerkintöjä käytettäessä on olemassa tehokkaita laskusääntöjä ongelmien ratkaisemiseksi. Kuitenkin tällä tapaa oppimistulokset jäävät lyhytaikaiseksi. (Bell, Costello & Küchemann 1983, 123). Tämänkaltaiset ohjeistukset:

- ”Yhteenlaskussa osoittaja ja nimittäjä on lavennettava yhtä suuriksi”
- ”Kertomalla murtoluvut ristiin toistensa nimittäjillä ne saadaan aina samannimisiksi”
- ”Kertolaskussa kerrotaan sekä nimittäjä ja osoittaja keskenään”
- ”Jakolaskussa jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla”

vaativat tuekseen riittävästi konkreettisia esimerkkejä, jotta ne eivät jää vain merkityksettömäksi sanahelinäksi (Behr & Post 1992; Ikäheimo & Voutilainen 2009).

3.4. Toimintamateriaalit matematiikan opettamisessa

Kennedy (1986, 6) määrittelee matematiikan opetuksen toimintamateriaalit (*manipulatives, manipulative materials*) objekteiksi, jotka vetoavat useisiin aisteihin ja joita lapset voivat koskettaa, liikuttaa, järjestellä tai muuten käsitellä. Moyerin mukaan toimintamateriaalit ovat esineitä, jotka on suunniteltu ilmentämään konkreettisesti matemaattisia ideoita, jotka ovat luonteeltaan abstrakteja. Toimintamateriaaleilla on sekä tunto- että näköaistiin perustuva muoto, ja oppija voi kosketella sitä käsin. (Moyer 2002, 176). Nykyään toimintamateriaaleina voidaan pitää myös tietokoneella tuotettuja matemaattisten objektien kuvauksia (Clements & Sarama 2008, 130). Tässä tutkimuksessa toimintamateriaaleihin kuitenkin viitataan vain fyysisinä esineinä. Useissa tutkimuksissa on todettu toimintamateriaalien asianmukaisella käytöllä saatavan parempia ja pitkäaikaisempia oppimistuloksia kuin ilman materiaaleja (Driscoll 1984, 35; Suydam 1986, 10; Moyer

2002, 175, 177; Boggan, Harper & Whitmire 2010, 4–5). Moyerin tutkimuksessa opettajat nimesivät esimerkiksi seuraavat matematiikan osa-alueet konkreettisten materiaalien hyödyntämiseen sopiviksi: Paikkajärjestelmä, murtolukujen ekvivalenssi, murtolukujen laskutoimitukset, desimaali- ja prosenttiluvut, geometria, todennäköisyyslaskenta, tilastot ja ongelmanratkaisu (Moyer 2002, 182).

Yleisimpiä toimintamateriaaleja ovat esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineet, Multilink –kuutiot, loogiset palat, Dienes Multibase Arithmetic Blocks ja Unifix –palikat. Murtoluvuissa käyttökelpoisimpia toimintamateriaaleja ovat murtokakut, värisauvat ja erilaiset joukkomallia kuvaavat esineet (Ikäheimo & Voutilainen 2009, 5). Näitä esitellään tarkemmin seuraavassa luvussa. Kaupallisten materiaalien hankkimisen lisäksi toimintamateriaaleja voidaan myös tehdä itse tai tuoda kotoa (Boggan, Harper & Whitmire 2010, 2). Esimerkiksi murtolukuja voidaan kuvata paperia taittelemalla (Lamon 1999, 104-105; Ikäheimo & Voutilainen 2009,4).

Vaikka toimintamateriaalien tärkeys korostuu oppimisvaikeuksien kanssa painivien oppilaiden kanssa, ne hyödyttävät myös matemaattisesti lahjakkaita oppilaita (Thornton & Wilmot 1986, 40). Tuoretta tutkimustulosta tästä on viimeisimmässä kansallisessa matematiikan arvioinnissa. Aineiston perusteella huomattiin, että heikot oppilaat oppivat paremmin lähtötasoltaan heikoissa kuin hyvissä kouluissa. Mielenkiintoista on, että myös lähtötasoltaan hyvät oppilaat oppivat tällaisissa kouluissa enemmän. Syyksi kirjoittajat epäilevät sitä, että lähtötasolta heikoissa kouluissa on jouduttu pohtimaan pedagogisia menetelmiä tavallista enemmän. Metsämuuronen päätyykin seuraavaan toteamukseen: ”On mahdollista päätellä, ja aineiston pohjalta on jopa todennäköistä, että parhaatkin oppilaat saavat siitä erityistä hyötyä, kun asioita havainnollistetaan konkreettisemmin.” (Metsämuuronen 2010, 121–123).

Toimintamateriaalit eivät ole kuitenkaan mikään autuaaksitekevä automaatti. Oppimistulokset paranevat vain, mikäli niitä käytetään asianmukaisella tavalla (Lindgren 1990, 90-91; Ahtee & Pehkonen 2000, 47; Moyer 2002, 177). Neményi painottaa toimintamateriaalien mahdollisuutta keksivään oppimiseen, jolloin oppimistulokset ovat pysyvämpiä kuin opetuksessa, joka perustuu irrallisten lauseiden opetteluun toistoon (Lampinen & Korhonen 2010, 21). Lindgren listaa Suydamin ja Higginsin periaatteita toimintamateriaalien oikeasta käytöstä:

1) Toimintamateriaalin käytön täytyy olla toistuvaa ja sopusoinnussa tavoitteiden

kanssa.

2) Toimintamateriaalia tulee käyttää yhdessä muun materiaalin (mm. kuvat, kaaviot, kirjat ja filmit) kanssa.
3) Toimintamateriaalien käyttö pitää suhteuttaa matematiikan sisältöön.
4) Toimintamateriaalia tulee käyttää kokeilevalla ja induktiivisella lähestymistavalla.
5) Käytettävän materiaalin tule olla mahdollisimman yksinkertaista.
6) Toimintamateriaalien käytön tulee motivoida tulosten symboliseen kirjaamiseen. (Lindgren 1990, 92).

Toimintamateriaalien käyttö ei ole itsessään oppimisen tavoite, vaan tie tavoitteeseen. Kyttälän mukaan matemaattisesti heikoilla oppilailla on usein vaikeuksia käsitellä myös visuaalis-spatiaalista informaatiota. Näin ollen heillä on vaikeuksia nähdä yhteyttä symbolisen matematiikan ja konkreettien apuvälineiden välillä. (Kyttälä 2008, 61). Siksi opettajan on tuotava selvästi esille isomorfinen yhteys matemaattisen idean ja konkreettisen materiaalin välillä. (Lindgren 1990, 92).

3.5. Murtokakut, värisauvat ja joukkomallit

Murtolukujen havainnollistamiseen parhaita välineitä ovat murtokakut, värisauvat ja mitkä tahansa esineet, joilla esitetään joukkomalli konkreettisesti. Ikäheimo ja Voutilainen suosittelevat erityisesti murtokakkujen käyttöä. Heidän mukaansa murtokakuilla voidaan konkretisoida kokonaisen jakamista osiin ja osien ilmaisemista murtolukuina, laventamista ja supistamista sekä murtolukujen laskutoimituksia. (Ikäheimo & Voutilainen 2009, 5) He antavatkin runsaasti käytännön esimerkkejä kaikista näistä (emt., 6–50). He esittävät myös lukion pitkän matematiikan kokeesta mukaillun tehtävän, jonka alakouluikäiset pystyvät ratkaisemaan konkreettisia materiaaleja käyttäen (emt., 49,52).

Myös värisauvoilla on monta eri käyttötarkoitusta murtolukujen havainnollistamisessa. Erityisen hyvin ne sopivat pituuksien suhteita tai jakoja käsittelevissä tehtäviin (Ikäheimo & Voutilainen 2009, 5). Kairavuo ja Voutilainen (2005, 9–11) painottavat murtolukujen opettamisen pohjalle hyvää käsitystä jakolaskusta, erityisesti erottelusta sisältö- ja ositusjaon välillä. He esittävät esimerkkejä värisauvoilla tehtävistä murtolukulaskuista. Aiheina ovat esimerkiksi osan ottaminen kokonaisesta, suhteen käsite ja murtolukujen avulla tapahtuva johdattelu prosenttilaskuihin (Kairavuo & Voutilainen 2005, 12–30). Myös Behr & Post (1992) antavat lukuisia esimerkkejä värisauvojen (Cuisenaire Rods) käytöstä murtolukujen suuruusvertailussa ja laskutoimituksissa. Mueller & Mahen (2010, 540–547) kuvailevat opetuskokeilua, jossa värisauvojen avulla harjoitellaan matemaattista todistamista. Yksi lisähyöty konkreettisten välineiden käytöstä oli, että ne auttoivat oppilaita keskustelemaan ideoistaan tehtävän ratkaisemiseksi (Mueller & Mahen 2010, 542).

3.6. Muisti

Price et al. (1982, 232) ovat määritelleet muistin seuraavasti: ”Muisti on aivojen kykyä jäljentää vanhoja kokemuksia ja ajatuksia, ja me käytämme ominaisuutta muuttaaksemme käytöstämme – oppiaksemme”. Muisti liittyy kaikkeen kognitiiviseen toimintaan, mutta erityisen voimakkaasti se on yhteydessä juuri oppimiseen. Muisti ei toimi irrallaan muusta kognitiivisesta toiminnasta, vaan se on yhteydessä muun muassa havaintoihin, ajatteluun, ongelmanratkaisuun, tarkkaavaisuuteen, kieleen ja motoriikkaan (Price et al. 1982, 232; Kalakoski 2007, 13).

Muistin toimintaan liittyy useita aspekteja kuten tallentaminen, koodaaminen ja mieleen palauttaminen (Price et al. 1982, 241). Muistiaines voi olla monessa muodossa: käsitteinä, visuaalisina mielikuvina, haju- tai makuelämyksinä (Kalakoski 2007, 95). Schunk puhuu samasta asiasta jakamalla muistiprosessien toiminnan fyysisiin, auditiivisiin ja semanttisiin toimintoihin (Schunk 2009, 135). Koetut tapahtumat tai määritellyt käsitteet eivät kuitenkaan jää muistiin sellaisinaan. Kalakosken (2007, 135) mukaan muisti ei ole luonteeltaan toistavaa vaan rakentavaa. Ihminen luo muistiin mielikuvia tapahtuneista asioista, ja nämä mielikuvat voivat vastata todellisuutta enemmän tai vähemmän tarkasti. Tähän prosessiin liittyy muistettavien asioiden koodaus eli se, missä muodossa asiat tallentuvat muistiin. Kalakosken (2007, 98) mukaan tieto säilötään sekä abstraktisina merkityksinä että konkreettisina aistimuksina.

Muistitutkimuksessa on tutkittu paljon, minkälainen materiaali pystytään palauttamaan mieleen parhaiten. Yksimielisiä ollaan siitä, että merkitykselliset asiat on helpompi muista kuin merkityksettömät (Bell, Costello & Küchemann 1983, 23; Kalakoski 2007, 89; Schunk 2009, 141). Matematiikassa tämä korostaa käsitteiden ymmärtämisen merkitystä. Mikäli ne jäävät opetuksessa merkityksettömiksi, niiden muistaminen myöhemmin vaikeutuu huomattavasti. Schunk painottaa myös huomion ja tarkkaavaisuuden osuutta muistin toiminnassa. Aisteihimme tulee jatkuvasti niin paljon informaatiota, että suurin osa siitä jää tietoisen huomion ulkopuolella, ja vain merkityksellisen informaatio päätyy muistijärjestelmän prosessoitavaksi (Schunk 2009, 138).

3.6.1. Muistityypit

Klassisen muistitutkimus on jaotellut muistin toiminnan seuraavan ns. monivarastomallin:

KAAVIO 1: Muistin monivarastomalli (Kalakoski 2007, 23):

Muistityypit	Sensorinen	Työmuisti	Säilömuisti
Kapasiteetti	Lähes kaikki tietyllä hetkellä nähty ja kuultu	4-9 yksikköä	Rajaton
Kesto	Sekunnin murto-osa	n. 20 sek.	Koko elinikä

Tämä malli on kuitenkin saanut viime aikoina kritiikkiä, eikä se kuvaa muistin toimintaperiaatteita tarkasti (Kalakoski 2009, 22). Muisti ei kuitenkaan koostu irrallisista varastoista, vaan kyse on enemmänkin saman järjestelmän sisäkkäisistä tasoista, jotka toimivat vuorovaikutuksessa toistensa kanssa. Kestoltaan erilaiset muisti-ilmiöt eivät siis kuvaa erillisiä muisti-ilmiöitä, vaan aktivoitumisen tasoa samassa muistijärjestelmässä. (Kalakoski 2009, 31–32). Täten vastaavasti kuten Price et al. (1982, 232) tässä tutkimuksessa monivarastomallia käytetään viitteellisenä mallina keskustelun helpottamiseksi ennemmin kuin tarkkana kuvauksena muistin toiminnasta.

Tämän tutkimuksen vähiten merkityksellinen muistityyppi on sensorinen muisti, ja olennaisin säilömuisti eli pitkäkestoinen muisti. Koska oppilailla on noin puoli vuotta siitä, kun he viimeksi ovat opiskelleet murtolukuja, on käsitteiden ja operaatioiden täytynyt jäädä säilömuistiin, jotta ne saataisiin palautettua koetilanteessa. Työ- eli lyhytkestoisen muistin yhteyttä matemaattiseen menestykseen on tutkittu paljon, mutta tämän tutkimuksen koeasetelmalla siitä ei saada tarkempaa tietoa. Jotkut tutkijat jaottelevat työ- ja lyhytkestoisen muistin kahdeksi eri muistityypiksi, joidenkin mielestä kyseessä on yksi muistikokonaisuus (Kyttälä 2008, 2). Koska huomio tässä tutkimuksessa ei ole työmuistin toiminnassa, tämän tutkimuksen kehyksessä riittää yksinkertainen jaottelu, jossa työ- ja lyhytkestoista muistia pidetään samana asiana.

3.6.2. Työmuisti ja säilömuisti

Kalakosken mukaan työmuisti eli lyhytkestoinen muisti on muistijärjestelmä, jonka avulla tehtävän kannalta olennainen tieto säilyy aktiivisena tehtävän suorittamisen ajan. Esimerkiksi laskemisessa työmuistissa pysyvät tarvittavat laskutoimitukset, luvut sekä laskun välivaiheet. (Kalakoski 2007, 51). Schunk (2009, 149) kuvailee työmuistia välittömän tietoisuuden muistiksi, jonne aisteista saapuva verbaalinen tai visuaalis-spatiaalinen tieto varastoidaan tehtävän suorittamisen ajaksi.

Työmuistin maksimikapasiteetistä on ollut eri aikoina erilaisia mielipiteitä. Price et al. (1982, 234) kuvaavat tätä kehitystä nostaen esiin G.A. Millerin, joka määritteli työmuistin kapasiteetiksi 7±2 yksikköä. Työmuistissa unohtamista on esitetty tapahtuvan kahdesta syystä. Ilman kertausta työmuistin kesto on noin 20 sekuntia. Lisäksi uuden informaation saapuessa muistijärjestelmään se hävittää vanhan tieltään kapasiteetin ylittyessä (Bell, Costello & Küchemann 1983, 17).

Käsitteellisessä jaottelussa työ- ja säilömuistin välillä työmuisti on usein nähty välivaiheeksi niille tiedoille, jotka päätyvät säilö- eli pitkäaikaiseen muistiin. Arkikielessä käytetty termi ”muisti” liittyy usein juuri säilömuistin toimintaan. Schunk jakaa eri tutkimusten perusteella säilömuistiin painettavan aineksen episodiseen, semanttiseen, deklaratiiviseen ja proseduraaliseen tietoon. Episodinen muisti on tiettyyn aikaan ja paikkaan sidottuja henkilökohtaisia tapahtumia, semanttinen muisti yleistä tietoa ja käsitteitä, deklaratiivinen muisti sisältää tapahtumia sekä kokemuksia, ja proseduraalinen muisti on taitojen hallintaa ja muistamista. (Schunk 2009, 151–152).

Säilömuistin kapasiteetti ja kesto on käytännössä rajaton (Price et al. 1982, 255; Kalakoski 2007, 94). Kalakoski kuvaileekin säilömuistin ongelmia ennemminkin siten, että ne liittyvät oppimiseen, muistojen luotettavuuteen ja siihen, ettei opittu säily muistissa sellaisenaan (Kalakoski 2007, 95). Onnistuneesti mieleen palautettujen asioiden määrää voidaan esittää karkeasti seuraavanlaisella kuvaajalla:

KUVA 4: Unohtamiskäyrä (vertaa esimerkiksi Kalakoski 2007, 139).

Unohtaminen on aluksi nopeaa, mutta tasaantuu ajan myötä. Muistin suoritusta voidaan parantaa määrätyillä toimilla. Bellin, Costellon & Küchemannin (1983, 26) mukaan mitä pidempään tieto on työmuistissa, sitä todennäköisemmin se päätyy säilömuistiin. Kuitenkin käytettyä aikaa tärkeämpää on se, kuinka tietoa prosessoidaan. Kalakoski (2007, 106) kuvaa muistin toimintaa verkolla, jossa asiat liittyvät toisiinsa erilaisten assosiaatioiden avulla. Mikäli uusi tieto pystytään liittämään edellisiin tietoihin, muuttuu se merkitykselliseksi, ja siten jää paremmin mieleen (Bell, Costello & Küchemann 1983, 27). Tärkeätä on myös muistettavan materiaalin prosessoinnin syvyys. Mikäli materiaalia työstettäessä käsitellään sen merkitystä pelkän tunnistamisen sijaan, on muistaminen tehokkaampaa (Bell, Costello & Küchemann 1983, 24; Kalakoski 2007, 154–155).

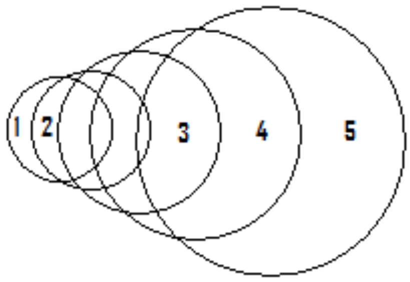
4. Opetussuunnitelma ja sen toteutuminen

Ylin opetusta määräävä asiakirja on opetussuunnitelma. Vitikan mukaan monimuotoisuutensa takia opetussuunnitelman määrittely on vaikeaa, mutta karkeasti ottaen opetussuunnitelmat voidaan jakaa kahteen näkökulmaan. Ensinnä opetussuunnitelma on kouluinstituution toiminnan ohjaamisen väline ja toisekseen se on nähty opettajan työvälineenä toimivana dokumenttina (Vitikka 2009, 49–50).

Opetussuunnitelma voi toimia keskitetysti tai hajautetusti. Jälkimmäisessä opetussuunnitelman päätäntävalta on lähempänä opetusta antavia tahoja. Pitkällä aikavälillä Suomessa on siirrytty kohti aiempaa hajautettua järjestelmää, vaikkakin vuoden 2004 opetussuunnitelman perusteet on edellistä keskitetympi (Heinonen 2005, 5). Opetussuunnitelman perusteissa määritellään valtakunnalliset puitteet, joiden sisällä opetussuunnitelmaa täydennetään kunta- tai koulukohtaisesti (Opetushallitus 2004, 10).

Törnroosin (2004, 17) mukaan perinteisesti opetussuunnitelma voidaan nähdä kolmitasoisena mallina: kirjoitettu, toteutettu ja toteutunut opetussuunnitelma. Toteutettu opetussuunnitelma kuvaa sitä miten opettaja opettaa, ja toteutunut lopulta sitä, mitä oppilaat oppivat (Heinonen 2005, 19,37; Hassinen 2006, 53). Tähän voidaan lisätä erilaisia aineksia tutkittavan kohteen mukaan. Cubanin opetussuunnitelmamallissa on mukana testien ohjaama opetussuunnitelma, joten se sopii tämän tutkielman opetussuunnitelmamalliksi.

KUVIO 3: Cubanin opetussuunnitelmamalli.



1. Suositeltu opetussuunnitelma
2. Virallinen opetussuunnitelma
3. Opetettu opetussuunnitelma
4. Testien ohjaama opetussuunnitelma
5. Opittu opetussuunnitelma (Heinonen 2005, 19)

Koulun virallisen opetussuunnitelman lisäksi viime aikoina on puhuttu myös piilo-opetussuunnitelmasta ja informaalista oppimisesta. Informaali oppiminen on koulun ulkopuolella ”epävirallisissa” paikoissa tapahtuvaa spontaania oppimista (Vitikka 2009, 131–137). Termillä piilo-opetussuunnitelmalla on yleensä negatiivinen sävy. Uusikylän ja Atjosen (2005, 55) mukaan sillä tarkoitetaan niitä opetuksen vaikutuksia, joita kukaan ei ole suunnitellut. Virta (1999, 3-4) korostaa arvioinnin merkitystä piilo-opetussuunnitelman toteuttajana, sillä oppilaan kehitystä tukevista arviointisuuntauksista huolimatta oppilasarviointi luo oppilaalle vahvasti käsitystä omasta itsestään ja osaamisestaan. Heinosen mukaan koulujen saatua mahdollisuuden vaikuttaa opetussuunnitelmaan monet koulut muokkasivat opetussuunnitelmia oppikirjojen sisältöjä vastaavaksi (Heinonen 2005, 5–6). Näin oppikirjojen tekijät ovat huomaamatta muuttuneet piilo-opetussuunnitelmallisiksi opetussuunnitelman laatijoiksi. Törnroos kuvaa oppikirjojen merkitystä matematiikan oppimistuloksiin kuvaavassa väitöstutkimuksessaan samaa ilmiötä termillä *mahdollinen opetussuunnitelma* (Törnroos 2005, 15–17).

4.1. Matematiikan opetussuunnitelmat

Kansainvälisesti matematiikan opetussuunnitelmien kehityksessä 1900-luvulla voidaan erottaa kuusi eri jaksoa.

1) Drillaus ja mekaaninen harjoittelu
2) Ymmärrettävä matematiikka
3) Uusi matematiikka (*New Math*)
4) Takaisin perusteisiin (*Back-to-Basics*)
5) Ongelmanratkaisu
6) Standardoitu opetussuunnitelma

(Lambdin & Walcott 2007, 3). Baker et al. vahvistavat nämä vaiheet oppikirjojen analysoinnin kautta. Heidän mukaan amerikkalaisessa hajautetussa opetussuunnitelmajärjestelmässä oppikirjat ovat luotettavin tiedonlähde opetussuunnitelmakehitystä tutkittaessa (Baker et al. 2010, 384). Yllä oleva kehitys heijastuu myös suomalaiseen matematiikan opetussuunnitelmakehitykseen.

1900-luvun alussa matematiikan pedagogiikkaan vaikuttivat voimakkaasti psykologit ja vallalla ollut behavioristinen käsitys, jonka mukaan toistamalla tarpeeksi kauan sopivia ärsyke-reaktio -ketjuja tapahtuu oppimista (English & Halford 1995, 1–3). Mekaanisen drillauksen jälkeen oli aika opetukselle, joka painotti enemmän matematiikan ymmärtämistä. Ymmärtävän laskemisen aika sai vaikutteita esimerkiksi hahmopsykologiasta. Suuntaus herätti vielä nykyaikanakin relevantteja huomiota matematiikan opetukseen esimerkiksi ongelmanratkaisun ja ajattelun kehittämisen saralla. Englishin ja Halfordin mukaan suuntaus kuitenkin epäonnistui, koska se ei onnistunut kuvaamaan tietoisia kognitioita, vaan jätti liian paljon alitajunnan varaan.

Neuvostoliiton laukaistua 1957 Sputnik-satelliitin erityisesti Yhdysvalloista huolestuttiin matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tilasta. Tämä sai kansakunnan siirtymään uuden matematiikan (*New Math*) aikakauteen. (Willoughby 1983, 364; Malaty 1998, 420; Ahtee & Pehkonen 2000, 89). Abstrakteja matemaattisia käsitteitä kuten joukko-oppi, funktio ja muut kuin kymmenjärjestelmään perustuvat lukujärjestelmät tuotiin perusopetuksen opetussuunnitelmiin ja oppikirjoihin (Lambdin & Walcott 2007, 11; Törnroos 2004, 26). Lisäksi painoa annettiin matemaattiselle todistamiselle ja logiikan päättelysäännöille (Willoughby 1983, 364). Arvostelijoiden mukaan liike menehtyi, sillä muutos edelliseen oli liian suuri, eivätkä vanhemmat ymmärtäneet enää mitä koulussa matematiikan tunneilla tapahtui ja pelkäsivät peruslaskutaitojen heikentyvän (Törnroos 2004, 26; Lambdin & Walcott 2007, 13). Vastavoimana uudelle matematiikalle nousikin ”takaisin perusteisiin” eli Back-To-Basics –liike. 1970-luvulla yleinen mielipide uutta matematiikkaa vastaan oli kääntynyt niin voimakkaaksi, että aritmeettisten peruslaskujen hallinta nousi takaisin opetussuunnitelman keskiöön (Malaty 1986, 48; Lambdin & Walcott 2007, 13). Willoughbyn mukaan tämä liike jäi merkityksettömäksi, sillä mikä tahansa lasku- tai tietokone pystyy voittamaan ihmisen laskutoimitusten mekaanisessa suorittamisessa, joten ihmisen matemaattisen toiminnan täytyy perustua ajatteluun ja ongelmanratkaisuun (Willoughby 1983, 365).

1980-luvulla alkaneessa ongelmanratkaisun aikakaudessa painotettiin oppilaiden yhteistoimintaa ja matematiikan kielellistämistä. Piaget´n ja Vygotskin teorioista nousi konstruktivismin aikakausi (Lambdin & Walcott 2007, 15). Matematiikan oppimisen nähtiin tapahtuvan vain oppilaan oman toiminnan ja kognitiivisten prosessien kautta (Ahtee & Pehkonen 2000, 92). Konstruktivismin vaikutus on jäänyt elämään vielä standardoinnin aikakaudelle osana oppimisnäkemystä (Lambdin & Walcott 2007, 17). Schweigerin (2006, 67) mukaan standardointi näkyy opetussuunnitelmista vastaavien tahojen taipumuksista tehdä luetteloita, jotka kuvastavat heidän tärkeimpinä pitämiään sisällöllisiä ja toiminnallisia asioita.

4.2. Matematiikan opetussuunnitelma Suomessa

Suomalaiset matematiikan opetussuunnitelmien oppimisnäkemykset ovat noudattaneet 1900-luvulla amerikkalaisten mallien esimerkkiä vaihtelevalla viiveellä (Törnroos 2004, 27). Matematiikan opetussuunnitelmien yleisrakenne noudattaa tietenkin kansallisen opetussuunnitelman yleisrakennetta. Viimeisimmät opetussuunnitelmat Suomessa ovat vuosilta 1985, 1994 ja 2004, ja rajaan tässä tarkastelun näihin kolmeen keskittyen erityisesti voimassaolevaan vuoden 2004 suunnitelmaan.

Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa annettiin ensi kertaa kunnille itse mahdollisuus – ja velvollisuus – vaikuttaa opetussuunnitelman sisältöön (Vitikka 2009, 63; Näveri 2009, 26). Remillard ja Bryans puolustavat opetussuunnitelman vientiä lähemmäksi oppilaita todeten opetussuunnitelman perusteisiin sitoutuneiden opettajien myös miettivän, kuinka nämä tavoitteet saadaan luokkahuoneissa toteutettua. He myös painottavat, että opetussuunnitelma on työkalu opettajille, ei oppilaille, joten sen suunnittelussa täytyy ottaa opettajat huomioon. (Remillard & Bryans 2004, 353). Toisena suurena muutoksena oli tasokurssien poistaminen (Hassinen 2006, 52). Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteet olivat kuitenkin perinteiset lehrplan-tyyppiset oppisisältöjä painottavat (Näveri 2009, 26).

Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa siirryttiin painottamaan oppilaskohtaista näkemystä ja oppimisprosessien luonnetta sisältöjen sijaan (Vitikka 2009, 161). Näverin (2009, 27–28) sanoin siirryttiin curriculum-ajatteluun. Törnroosin mukaan muutokset koettiin pääosin myönteisiksi. Opettajan päätäntävallan lisääntyminen johti esimerkiksi opetusmenetelmien monipuolistumiseen ja oppikirjasidonnaisuuden vähenemiseen. Toisaalta kritiikkiä sai esimerkiksi suunnittelun vaatiman ajan lisääntyminen ja opettajien yhteistoiminnan ajoittainen vaikeus. (Törnroos 2004, 21). Vuosiluokkakohtaisista oppisisältötavoitteista luovuttiin. Opetussuunnitelmatyön hajaannuttua tunnettiin myös painetta edetä kohti kansainvälisen suuntauksen mukaista standardoinnin vaihetta. Törnroosin (2004, 27) mukaan kouluilla oli vapautta suunnitella opetusta, mutta sitä rajoitettiin loppu- ja välitavoitteilla. Hassisen (2006, 70) mukaan standardien vaihe näkyy vuonna 1999 tapahtuneesta perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerien antamisessa sekä 1998 alkaneessa matematiikan kansallisen kokeen järjestämisessä päättövaiheen oppilaille.

Vitikan mukaan uusimman vuoden 2004 opetussuunnitelman perusteiden rakenne on vuoden 1994 asiakirjan kaltainen. Yleinen osa sisältää esimerkiksi oppimisnäkemystä ja opetuksen käytännön järjestämiseen vaikuttavat asiat. Toisessa osassa on oppiainekohtaiset tavoitteet, sisällöt ja arviointikriteerit. (Vitikka 2009, 153). Niemen mukaan myös matematiikan opetuksen tavoitteet ja sisällöt ovat samankaltaisia, joskin ne on määritelty eri tavalla (Niemi 2008, 18). Yleisesti matematiikan osalta painotetaan seuraavia asioita:

> *Matematiikan opetuksen tehtävänä on tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja matemaattisten käsitteiden sekä yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen. Opetuksen tulee kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua, ja sen tulee ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin. Matematiikan merkitys on nähtävä laajasti – se vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen sekä edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta.*

(Opetushallitus 2004, 158).

Lisäksi mainitaan arkielämän ongelmien yhdistäminen ratkaiseminen matematiikan avulla sekä konkreettisten apuvälineiden käyttö yhdistettäessä oppilaan kokemukset ja ajattelujärjestelmät matematiikan abstraktiin järjestelmään (Opetushallitus 2004, 158). Sisällöissä 3.-5. luokan osalta mainitaan seuraavat murtolukuihin liittyvinä seuraavat asiat:

• murtoluvun käsite, murtolukujen muunnokset
• desimaaliluvun käsite
• murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välinen yhteys
• murtolukujen ja desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskua sekä kertominen ja jakaminen luonnollisella luvulla
(Opetushallitus 2004, 161).

Opetussuunnitelman matemaattinen painotus ei lähde itse matematiikan rakenteista, vaan siinä painotetaan oppilaan arkikokemuksia ja haetaan matematiikan yhteyttä niihin. Esimerkiksi konkreettiset materiaalit toimivat siltana arkikokemusten ja matemaattisten abstraktioiden välillä, sen sijaan että niillä haettaisiin suoraa yhteyttä matematiikan rakenteista oppilaan ajatteluun. Tätä ajattelutapaa heijastavaa näkemystä kutsutaan matemaattiseksi lukutaidoksi (*mathematical literacy*), jossa tärkeintä ei ole itse matemaattiset rakenteet vaan arkielämässä tarvittavat laskentataidot. Malaty perustelee matemaattisten sisältöjen ottamista opetussuunnitelmassa paremmin huomioon matemaattisten aineiden koulutuspoliittisten sisältöjen lisäksi myös kulttuurin säilyvyyden ja kehityksen sekä yksilön älyllisen kehityksen kannalta (Malaty 2007, 422). Huomattavaa on myös matematiikan opetuksen vähäinen määrä. Euroopan maiden matematiikan opetuksen keskiarvo 7-14 –vuotiailla on 4,3 tuntia viikossa, kun se Suomessa on vain 2,6 viikkotuntia (Opetushallitus 2009a, 16).

4.3. Matematiikan oppikirjat ja valmiskokeet

Heinosen (2005, 29) mukaan oppikirjan erottaminen kauno- tai tietokirjasta ei ole aina yksiselitteistä, mutta yleisesti oppikirjalla tarkoitetaan opetustarkoitukseen laadittua teosta. Vaikka Suomessa ylin opetuksesta määräävä asiakirja on opetussuunnitelma, on käytännössä oppikirjalla erittäin suuri merkitys opetuksen sisältöön (Törnroos 2004, 11,32; Niemi 2010, 68). Perkkilä tutki väitöskirjatutkimuksessaan opettajien matematiikkauskomuksia ja oppikirjan merkitystä alkuopetuksessa. Yli 94 prosenttia opettajista nimesi joko oppikirjan tai opettajanoppaan tärkeimmäksi oppimateriaaliksi (Perkkilä 2002, 194). Niitä myös käytettiin pääsääntöisesti jokaisella matematiikan tunnilla (Perkkilä 2002, 156). Vuoden 2008 valtakunnallisessa matematiikan taitojen arvioinnissa oppikirjan nimesi tärkeäksi tai melko tärkeäksi matematiikan opetuksessaan 97 prosenttia, ja opettajan oppaan 88 prosenttia (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 137).

Perkkilän tutkimuksessa monet – etenkin nuoret – opettajat tunnistivat oppikirjasidonnaisuuden ja ainakin halusivat pyrkiä siitä pois, mutta ulkoiset tekijät kuten oppikirjan käytön helppous tai kiire opetuksessa vaikeuttivat tätä (Perkkilä 2002, 158). Perkkilän mukaan oppikirjasidonnaisuus on ongelmallista, sillä se on ristiriidassa lapsen oppimista koskevan tutkimuksen kanssa. Lapsen tulisi saada ensin tutustua asioihin konkreettisten materiaalien kautta (Perkkilä 2002, 151). Beattie puhuu samasta asiasta todetessaan oppikirjojen nojaavan vahvasti kommunikointiin kuvioiden välityksellä. Hänen mukaansa kuvien tulkitseminen on kuitenkin kehittyvä ominaisuus, joka lasten täytyy oppia. Mallintamalla laskualgoritmeja esineillä lapset ovat paremmin varustautuneita tulkitsemaan kuvia, jotka esittävät laskuoperaatioita. (Beattie 1986, 24).

Törnroos on koonnut Englundin syitä oppikirjojen vahvan aseman syistä:

1) Oppikirjat takaavat opettajien mielestä opetuksen tietotavoitteiden täyttymisen
2) Oppikirjat luovat turvallisuuden tunnetta sekä opettajille että oppilaille
3) Oppikirjat helpottavat arviointia
4) Järjestyksen ylläpitäminen luokassa
5) Muut opettajan työtä helpottavat syyt kuten oppilaiden poissaolojen käsittely (Törnroos 2004, 32)

Heinonen (2005, 40) toteaa, että koska opetussuunnitelman oppimiskäsitys on konstruktivistinen, pitäisi myös oppimateriaalien pohjautua samaan oppimiskäsitykseen. Kuitenkin oppikirjaan pohjautuva opetus johtaa helposti opettajajohtoiseen työskentelyyn, jossa kaikki oppilaat tekevät samoja asioita samalla tavalla (Norris et al. 1996, 28). Joutsenlahti ja Vainionpää (2008, 556) päätyvät toteamukseen, että nykyiset oppikirjat ovat ennemmin täytettäviä harjoituskirjoja kuin oppikirjoja, joiden avulla asioita voisi opiskella itsenäisesti. Malaty on heidän kanssaan samoilla linjoilla. Hänen mukaansa konstruktivismin iskulause ei vaikuta matematiikan opetuksen sisältöön, mikä näkyy oppikirjojen sisällöissä. Nykyisissä oppikirjoissa korostetaan mekaanista laskuharjoittelua, eikä opeteta matematiikkaa rakenteena. Malaty kritisoi myös ongelmanratkaisu tehtävien luonnetta siitä, että niissä ei opeteta matemaattisen struktuurin hallintaa vaan pelkästään yleistä päättelyä. (Malaty 2004, 126).

Valmiskokeet

Perkkilän tutkimukseen osallistuneet opettajat käyttivät runsaasti oppikirjojen valmiskokeita, vaikka eivät luottaneet täysin siihen, että ne mittaavat annettua opetusta. Syitä valmiskokeiden käyttöön olivat esimerkiksi niiden helppokäyttöisyys, omien kokeiden suunnittelun vaatima aika, omiin kykyihin uskomisen puute ja ”valtakunnallisen tason mukana pysyminen” (Perkkilä 2002, 159). Tässä on suuri ero ala- ja ylökoulun välillä. Alakoulussa erittäin suuri osuus opettajista käyttää jatkuvasti matematiikassa valmiskokeita, mutta yläkoulussa aineenopettajat valmistavat itse kokeensa. Erityisesti alakoulun opettajilla on siis vahva usko siihen, että oppikirjat testeineen edustavat opetussuunnitelmaa. Opetushallitus kuitenkin luopui oppikirjojen tarkastamisesta 1992 (Rinne 1993, 12), joten niiden vastuu niiden sisällöstä on vain kustantajilla, eikä sitä määrittele mikään valtakunnallinen standardi. Koska oppikirjoilla on suuri merkitys opetuksessa, kehottaa Niemi (2010, 68) pohtimaan valtakunnallista seurantaa oppimateriaalien kehittämiseen. Lisäksi on huomioitava, että oppikirjan kustantajilla on opetuksen kehittämisen ohella mukana myös taloudelliset intressit (Heinonen 2005, 34; Vitikka 2009, 67). Virta on koonnut amerikkalaisten kasvatusalan järjestöjen standardeja, jotka on suunnattu opettajan arviointitaitojen arviointiin. Nämä ohjeet opettajille sisältävät seuraavat valmiskokeisiin liittyvät kohdat:

- *Opettajan tulisi osata valita opetusta koskevia päätöksiä varten soveliaat arviointimenetelmät (on erotettava hyvä ja huono arviointi, mikä koskee myös kaupallisia kokeita ja testejä).*
- *Opettajan tulee osata laatia itse arviointivälineitä.*
- *Opettajan tulee osata arvioida, pisteyttää ja tulkita oppilaiden saavutuksia sekä itse laadituissa että muualta tulevissa kokeissa.*

(Virta 1999, 109-110).

5. Arvionti

Opitun asian arvioinnilla on perinteisesti nähty kaksi päätarkoitusta. Ensinnä ne kuvaavat osaamista jatko-opiskelu- ja työpaikkaa hakiessa. Toisaalta ne antavat oppilaalle itselleen informaatiota oppimisprosessista ja sen tuloksista, mikä voi auttaa suuntaamaan tulevaa opiskelua ja tehostamaan sitä. (Bloom, Hastings & Madaus 1971, 7,61). Lisäksi arvioinnin voidaan katsoa antavan kouluttajalle tietoa koulutusohjelmien laadusta (Vuorenmaa 2001, 29). Virta (1999, 3) näkeekin nykyään tässä ristiriidan arvioinnin kentällä: Yhtäältä kognitiivis-konstruktivistisen oppimisnäkemyksen mukaan arvioinnin tulisi olla oppilaan kehitystä tukevaa, toisaalta kiinnitetään huomiota koulujen tulosvastuullisuuteen ja tilitysvelvollisuuteen. Virta näkeekin uuden ja vanhan arviointikulttuurin kohtaavan ja sekoittuvan koulussa. Hänen mukaansa vanhassa kulttuurissa tärkeää on ollut tiedon muistaminen ja toistaminen sekä oppilaiden numerointi, kun taas uudessa kulttuurissa pyritään tukemaan oppilaiden kasvua ja edistämään oppimisprosesseja (Virta 1999, 1). Virran (emt., 3) mukaan arvioinnin merkitys on joka tapauksessa nykyään entisestään korostunut, puhuttakoon oppilaiden, opetuksen, koulujen tai koulujärjestelmien arvioinnista.

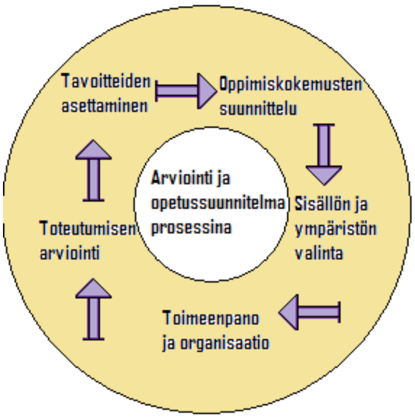
Virta puhuu arvioinnista osana opettajan ammattietiikkaa. Opettajan tekemä arviointi vaikuttaa sekä oppilaan minäkuvaan että sijoittumiseen jatko-opiskelussa ja työelämässä. Arvioinnin suorittaminen on eräänlaista vallankäyttöä, jossa valitaan mitä ja miten arvioidaan. Vaikka arviointi tuskin koskaan voi olla täysin neutraalia ja objektiivista, on opettajan tiedostettava eettinen vastuunsa ja pyrittävä kohti mahdollisimman suurta oikeudenmukaisuutta (Virta 1999, 122-125). McNeill on koonnut yhdysvaltalaisen National Forum Assessment –järjestön periaatteita hyvästä arvioinnista:

- *Arvioinnin ensisijaisena tarkoituksena on parantaa oppilaan oppimista.*
- *Arvioinnin tulee olla tasapuolista kaikille oppilaille.*
- *Arvioinnista tulee tiedottaa tasapuolisesti ja riittävän usein.*
- *Arviointijärjestelmiä täytyy tarkastella ja kehitetään riittävän usein.*

(McNeill 1997, 39-40).

Perinteisen näkemyksen mukaan oppiminen on nähty vaiheittaisena prosessina, jossa ensin määritellään opetuksen tavoitteet, suoritetaan opetus ja lopuksi arvioidaan saavutetut tulokset. Törnroos painottaa kuitenkin arvioinnin syklistä luonnetta ja esittää sen seuraavalla mallilla:

KUVIO 4: Tylerin arvioinnin perusmalli Syklin muodossa esitettynä (Törnroos 2004, 54).



Tämä malli sopii kuvaamaan myös tämän tutkimuksen käsitystä ja tavoitteita arvioinnista osana oppimisprosessin luonnetta. Mallissa korostuu arvioinnin tehtävä osana uuden asian oppimista myös varsinaisen oppimisprosessin jälkeen.

5.1. Matematiikan arviointi

Swanin mukaan matematiikassa voidaan arvioida seuraavia asioita: matemaattisten faktojen tietämistä, matemaattisten taitojen osaamista, matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä, matemaattisten ratkaisustrategioiden hallintaa, yleisten ratkaisustrategioiden hallintaa, asenteita sekä tietoisuutta ratkaisuun vaadittavista asioista (Swan 1993, 28).

Bloomin taksonomiaa on käytetty paljon opetuksen arvioinnin mallina, ja sen perusteella Wilson on muokannut erityisesti matematiikan arviointiin sopivan taksonomian. (Ahtee & Pehkonen 2000, 74).

KAAVIO 2: Wilsonin taksonomian kognitiivinen alue (Hassinen 2006, 22):

Analysointi
Soveltaminen
Ymmärtäminen
Laskutaito

Perinteistä matematiikan opetusta ja sen mukana myös arviointia on usein syytetty siitä,

että se keskittyy liikaa vain alimman tason tehtäviin (Niemi 2008, 19)
Arviointi ei ole yksinäinen saareke koulumaailmassa, vaan se on läheisesti kytköksissä opetukseen. Vaikka tarkoituksena on että opetetun asian osaamista arvioidaan, on arvioinnin merkitys niin suuri, että vaikutus toimii myös toiseen suuntaan: opetetaan sitä mitä kokeissa kysytään (Putkonen 1993, 40; Törnroos 2004, 56–57). Virta kuvaa tätä ilmiötä mielikuvalla, jossa ”arviointihäntä heiluttaa opetussuunnitelmakoiraa”. Tällöin arvioinnin sisällöstä tulee niin tärkeää, että se alkaa vaikuttaa opetukseen (Virta 1999, 7, 17). Beattie kritisoi arviointia samasta asiasta matematiikassa toteamalla, että oppilaiden saavutukset mitataan siitä kuinka hyvin he suorittavat algoritmit, eivät siitä kuinka hyvin he ymmärtävät ne. Täten opettajat keskittyvät algoritmien mekaanisen hallinnan opettamiseen, ei niiden ymmärtämiseen. (Beattie 1986, 23). Suppeat arviointimenetelmät vaikuttavat myös laajemmin koko matematiikkakuvan muodostumiseen. Hihnalan (2005, 26–27,63) mukaan oppilaat ovat yläasteelle tulleessaan omaksuneet selvän näkemyksen siitä, että tärkeintä matematiikassa on löytää oikea vastaus. Joutsenlahti & Vainionpää (2010, 140) ovat samoilla linjoilla todeten suljettujen tehtävien johtavan vain ”oikeiden vastausten” etsimiseen eikä edistä ratkaisuprosessin kriittistä tarkastelua.

5.1.1. Matematiikan kansalliset arvioinnit

Suomessa on tehty kansallisia oppimistulosten arviointeja vuodesta 1979 lähtien (Niemi 2008, 19). Tutkimusten tekemisessä ovat olleet mukana Opetushallitus, Matemaattisten aineiden opettajien liitto MAOL, koulutuksen tutkimuskeskus sekä Helsingin yliopisto (Törnroos 2004, 71). Opetushallitus on tehnyt systemaattisesti matematiikan oppimistulosten arviointeja vuodesta 1998 lähtien (Niemi 2008, 19). Tutkimuksilla on ollut kaksi päätarkoitusta: selvittää koulutuksellisen tasa-arvon toteutumista ja matematiikan sisältöjen hallintaa. Koulutuksellisessa tasa-arvossa on kiinnitetty huomioita alueelliseen, kielelliseen ja sukupuolten väliseen tasa-arvoon. (Törnroos 2004, 71). Kansallisissa arvioinneissa ei tutkita yksittäisen oppilaan osaamista, vaan ollaan kiinnostuneita koko ikäluokan taitotasosta. Koska kansallisten testien osaamista on verrattu opetussuunnitelman tavoitteisiin, ovat ne olleet kriteeripohjaisia (Törnroos, 64). Törnroos (emt., 77) kuitenkin huomauttaa, että kansallisten testien keskiarvoiset ratkaisuprosentit on pyritty kiinnittämään tietylle tasolle esitestien avulla. Näin tulokset perustuvat normaalijakaumaan, ja käytännössä tietty osuus oppilaista jää aina heikoksi määritellyn osaamistason alle.

Viimeisin kansallinen arviointi on vuodelta 2008, jolloin tutkittiin osaamista viidennen luokan eli opetussuunnitelman toisen nivelkohdan jälkeen (Niemi 2010, 18). Tämän lisäksi alaluokkien osaamista on tutkittu vuonna 2000, 2005 ja 2007 (Niemi 2008, 7, 19). Seuraava kansallinen arviointi on määrä suorittaa keväällä 2011 (Opetushallitus 2009b). Aiemmissa arvioinneissa tärkeimpinä tuloksina on ollut, että suomalaiset ovat osanneet matematiikkaa keskimäärin hyvin, sukupuolten väliset ja alueelliset erot ovat olleet pieniä, mutta ruotsinkielisten oppilaiden tulokset ovat olleet heikompia. Viihtyminen koulussa on vaikuttanut positiivisesti tuloksiin. (Niemi 2008, 7–8).

Uusimmassa arvioinnissa tulokset ovat vastaavia kuin yllä olevat tiedot aiemmista arvioinneista. Murtolukuja ei tutkittu omana alueenaan, mutta ne kuuluvat luokkaan ”luvut, laskutoimitukset ja algebra”, joka oli osattu kohtalaisesti verrattuna muihin osa-alueisiin (Niemi 2010, 47–49). Tämän tutkielman kannalta kiinnostavimpia ovat oppikirjoihin liittyvät tulokset. Aiempien vuosien tapaan opettajat mainitsivat oppikirjojen ja opettajanoppaiden merkityksen suureksi matematiikan opetuksessaan (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 137). Vielä 2007-tutkimuksessa todettiin käytetyllä oppikirjalla olevan suuri merkitys oppimistuloksiin, koska eri kirjasarjojen tulokset poikkesivat toisistaan huomattavasti, ja samanlainen tulos oli saatu vuoden edellisessä samaa luokka-astetta mittaavassa vuoden 2000 arvioinnissa (Metsämuuronen 2008, 85). Uusimmassa tutkimuksessa kuitenkin oppikirjojen paremmuusjärjestys on kääntynyt päinvastaiseksi, ja Joutsenlahti & Vainionpää (2010, 143) päätyvät johtopäätökseen että muut tekijät kuten opettajan toiminta ja oppilaskohtaiset syyt ovat käytettyä oppikirjaa tärkeämmät. Myös suhtautumista valmiskokeisiin oli kysytty väittämällä ”Oppikirjojen valmiskokeet mittaavat hyvin oppilaiden matematiikan osaamista”. 64,8 prosenttia oli samaa tai täysin mieltä, kun eri mieltä oli vain 12,8 prosenttia opettajista (*n*=359). (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 139).

5.1.1. Matematiikan kansainväliset arvioinnit

Jo ennen systemaattisten kansallisten arviointien alkamista Suomi on osallistunut laajoihin kansainvälisiin tutkimuksiin. Kansainvälisissä tutkimuksissa saadaan laajempaa tietoa kuin mitä pelkissä kansallisissa tutkimuksissa on mahdollista hankkia, ja näin päästään vertailemaan oman kansallisen opetussuunnitelman vahvuuksia ja heikkouksia. Verrattuna kansallisiin kriteeripohjaisiin arviointeihin kansainväliset arvioinnit poikkeavat myös siinä, että niissä on luontevaa käyttää suhteellista arviointitapaa eri maiden koulusaavutusten erojen mittaamiseksi. (Törnroos 2004, 64.)

1990-luvulta lähtien Suomi on osallistunut seuraaviin suuriin arviointitutkimuksiin: Kassel-projektiin 1995, TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) –tutkimukseen 1999 ja OECD:n PISA (Program for Interantional Student Assessment) –tutkimuksiin 2000, 2003, 2006 ja 2009. TIMSS:issä tutkittiin matematiikan lisäksi myös luonnontieteiden osaamista ja PISA:ssa lukutaitoa, luonnontieteitä ja ongelmanratkaisua (Kupari et al. 2004, 7). PISA:ssa pääpaino on ollut matematiikalla vuonna 2003. Lähitulevaisuus on mielenkiintoinen, sillä jätettyään väliin vuoden 2003 TIMSS-tutkimuksen Suomi on jälleen osallistumassa TIMSS 2011 –tutkimukseen, ja vuoden 2012 PISA:ssa on pääpaino matematiikassa.

Kaikki yllä mainitut tutkimukset poikkeavat suuresti lähtökohdiltaan, toteutukseltaan ja myös tuloksiltaan (Törnroos 2004, 66). Suomalaisten menestyminen PISA:ssa on ollut aina erittäin hyvää (Lavonen 2009, 1). Tosin PISA:ssa ei mitata varsinaista matemaattista osaamista, vaan ”matemaattista lukutaitoa (*mathematical literacy*). Tällä tarkoitetaan oppilaiden kykyä käyttää matemaattisia taitoja arkipäivän elämässä vastaan tulevissa tilanteissa (OECD 2010). Muissa tutkimuksissa suomalaisten tulokset ovat olleet heikompia. TIMSS-tutkimuksessa Suomen sijoitus 38 maan joukossa oli hyvää keskitasoa lopullisen sijoituksen ollessa 14. Tutkittujen OECD-maiden joukossa Suomi oli keskitasoa. (Kupari et al. 2001, 38–39). KASSEL-projektissa suomalaisten menestyminen ei ollut hääppöistä. Kuuden vertaillun eurooppalaisen maan joukossa Suomi oli yhteispisteissä toiseksi viimeinen (Soro & Pehkonen 1998, 22,38). Murtolukujen laskutoimituksissa Suomi oli heikoin Englannin kanssa (emt., 27–28). Soro ja Pehkonen päätyvätkin tylyyn päätelmään, että näiden tulosten valossa suurin osa suomalaisista ei selviydy arkipäivän yksinkertaisista laskutoimituksista ilman laskimen apua (emt., 29).

5.2. Arvioinnin osuus vuoden 2004 opetussuunnitelmassa

Nykyisen vuoden 2004 opetussuunnitelman arviointiperusteet ovat kahtaalle jaetut. Ensinnä on olemassa yleiset arviointiperiaatteet ja toisekseen oppiainekohtaiset kriteerit hyvälle osaamiselle. Molempien tulee olla opetussuunnitelmassa määriteltyjä, ja oppilaalle sekä hänen huoltajilleen on tiedotettava riittävästi arvioinnin periaatteista. Oppilaan työskentelyä arvioidaan suhteessa opetussuunnitelman kriteereihin. Palautetta voidaan antaa sanallisesti, numeroarvosteluna tai näiden yhdistelmänä. Yleisissä periaatteissa mainitaan arvioinnin tehtävä opiskelun kannustamisessa ja toisaalta oppilaan kasvun ja oppimisen tavoitteiden toteutumisen kuvaamisessa. Lisäksi painotetaan realistisen kuvan muodostumista oppilaan osaamisesta ja kehittymisestä. Arvioinnin merkitys laajemmin on täten persoonallisuuden kasvu. Oppilaan itsearvioinnin taitoja pyritään kehittämään, ja täten pyritään tukemaan itsetuntemuksen kasvua ja opiskelutaitojen kehittymistä. Tässä prosessissa tärkeää on jatkuvan palautteen merkitys. (Opetushallitus 2004, 262-264).

Murtolukujen osalta hyvän osaamisen kriteereissä 3.-5. luokalla mainitaan vain murtoluvun käsitteen ymmärtäminen ja murtolukujen esittäminen eri metodeilla (Opetushallitus 2004, 162). Näin väljä arviointikehys jättää paljon avoimeksi, sillä esimerkiksi 3.-5. luokan murtolukujen keskeisissä sisällöissä on lueteltu paljon suurempi määrä osattavia asioita, mutta arviointikriteereissä ei oteta minkäänlaista kantaa kuinka ne pitäisi hallita.

5.3. Kokeet osana arviointia

Madaus, Russell & Higgins (2009, 47) huomauttavat aiheellisesti, että kiinnostuksen kohteena ei ole oppilaan menestyminen testeissä, vaan sen mittaaminen, kuinka hyvin hän osaa testattava olevan asian tai käsitteen. Wiliam ja Black ja esittävät, että ikinä ei ole mahdollista saada selville täysin luotettavasti oppilaiden todellista osaamista (ns. *true score*). Todellinen taitotaso on nähtävä enemmänkin ideaalina, jota kohti voidaan vain pyrkiä. Yhtenä tapana estimoida asiaa voidaan nähdä kuvitteellinen tilanne, jossa samaa oppilasta testattaisiin useampia kertoja, jolloin todellinen osaamistaso olisi näiden testitulosten keskiarvo (Wiliam & Black 2006, 120).

Kokeet voidaan jakaa arviointiperusteen mukaan kahtia kriteeripohjaisiin ja suhteellisiin kokeisiin. Kriteeripohjaisissa kokeissa on määritelty tietty perustaso, johon liittyvät asiat on osattava. Esimerkiksi nykyisen opetussuunnitelman arviointi pohjaa hyvän osaamisen kriteereihin, jotka hallitessaan oppilas on ansainnut arvosanan kahdeksan (Opetushallitus 2004, 263). Suhteellisessa arvioinnissa arvioitavat asetetaan suorituksensa mukaiseen paremmuusjärjestykseen. Esimerkkinä tällaisesta arvioinnista on esimerkiksi oppilaitosten pääsykokeet tai ylioppilaskirjoitukset (Törnroos 2004, 61). Bloom, Hastings & Madaus (1971, 43) kritisoivat suhteellista arviointia siitä, että siinä automaattisesti oletetaan osan kokelaista epäonnistuvan, mikä johtaa itseään toteuttavaan ennustukseen ja siten heikentää koulutuksen tehokkuutta. Suhteellinen arvostelu voi myös nostaa tai laskea vaatimustasoa kontrolloimattomasti, mikäli kokeiden osallistuvien henkilöiden taso laskee tai nousee ajan myötä.

Toinen oleellinen jaottelu kokeissa on niiden käyttöfunktio. Vakiintunut tapa on jakaa kokeet formatiivisiin, summatiivisiin, diagnostisiin ja evaluatiivisiin. Harlenin mukaan formatiivisten kokeiden tehtävänä on antaa tietoa oppimisprosessin etenemisestä suhteessa tavoitteisiin, jotta oppimista voitaisiin tehostaa. Summatiiviset kokeet tiivistävät opitun asian arvosanaksi, jonka tarkoituksena on antaa tietoa oppimisen tuloksista kiinnostuneille, lähinnä oppilaalle itselle, hänen vanhemmilleen, jatkokoulutuspaikoista päättäville tahoille sekä työnantajille. Evaluatiivisessa arvioinnissa ei olla kiinnostuneita yksilön osaamisesta, vaan tarkastellaan opettajan, koulun tai koulutussysteemin opetuksen tehokkuutta. (Harlen 2006, 104). Diagnostiset testit suoritetaan ennen opetusprosessin alkua, ja niiden tehtävänä on antaa opettajalle tietoa oppilaan tai ryhmän osaamisesta opetuksen suunnittelua varten (Bloom, Hastings & Madaus 1971, 14–15). Swan huomauttaa lisäksi, että opettaja voi pitää koetta formatiivisena, oppimisprosessia tukevana, mutta oppilaille on tärkeintä saada tietää keskinäinen paremmuus eli he suhtautuvat kokeeseen summatiivisena (Swan 1993, 26).

Madaus, Russell ja Higgins käsittelevät kokeiden validititeettia. Heidän mukaansa yksiselitteistä ratkaisua validiteetin varmistamiseksi ei ole, mutta he kiinnittävät huomiota neljään asiaan. Ensinnä testin kysymysten ja tehtävien täytyy vastata kyseessä olevaa aihealuetta. Tämä tapahtuu useimmiten siten, että asiantuntijat arvioivat sopiiko testin sisältö kohderyhmälle eli toisin sanoen vastaavatko testikysymykset aihealuetta. Tämä on tärkeä mutta yksinään riittämätön etappi validiteettitarkastelussa. Toisena seikkana on pohtia, vastaavatko testissä vaaditut kognitiiviset taidot testattavien kykyjä. Esimerkiksi aritmeettista osaamista mittaavissa sanallisissa tehtävissä luetun ymmärtämisen puutteet voivat aiheuttaa vääristyneitä tuloksia. Kolmanneksi on syytä tarkastella, vastaavatko testien tulokset muita vastaavia testejä ja oppilaan luokkahuonetyöskentelyä. Neljänneksi heidän mukaansa täytyy miettiä testituloksien positiivisia ja negatiivisia vaikutuksia oppilaaseen, oppilaryhmiin, opettajiin sekä koko kouluyhteisöön. (Madaus, Russell & Higgins 2009, 52-54).

Tärkeä osa kokeiden laadintaa on myös sopivien tehtävätyyppien valintaa. Törnroos arvioi monivalinta- ja tuottamistehtävien eroja. Hänen mukaansa tuottamistehtävät vaativat yleensä mutkikkaampia kognitiivisia taitoja. Tuottamistehtävien sivutuloksena saadaan myös diagnostista tietoa oppilaiden osaamisesta, kun taas monivalintatehtävissä informaatio rajoittuu oikein-väärin –akselille. Toisaalta tuottamistehtävien arviointi on työläämpää ja niihin liittyy arvioijan subjektiivinen tulkinta. (Törnroos 2004, 58–61). Pehkonen jakaa tehtävät avoimiin ja suljettuihin. Suljetuissa tehtävissä on määriteltynä selkeä alku- ja lopputilanne. Avoimissa tehtävissä sen sijaan molemmat sisältävät useita vaihtoehtoja. (Pehkonen 1994, 62). Pehkonen esittää jaottelunsa koskemaan matematiikan opetusta, mutta samaa jaottelua voidaan käyttää myös koetehtävissä. Swan (1993, 26–27) kritisoi perinteisesti käytettyjä tehtäviä liian kapeiksi ja niiden vaatimia ratkaisustrategioita yksinkertaisiksi, jolloin ne eivät ennusta oppilaiden kykyjä ratkoa todellisia ongelmatilanteita matematiikan keinoin. Ahtee ja Pehkonen esittelevät erilaisia malleja poikkeavien arviointitehtävien – esimerkiksi avoimien tehtävien ja ongelmatehtävien – toteuttamiseksi. Näissä menetelmissä painotetaan tulosten sijaan enemmän itse prosessia. (Ahtee & Pehkonen 2000, 80–83). Virta huomauttaa kognitiivis-konstruktiivisen oppimisnäkemyksen tulemisesta koulumaailman, ja kuinka sen on näyttävä myös koetehtävissä. Hänen mukaansa tehtävien suorittamisen tulee heijastaa vaativimpien oppimisprosessien luonnetta ja sisältää muutakin kuin opetellun tiedon reproduktiota eli toistamista. (Virta 1999, 27-28).

6. Tutkimuskysymykset

Tutkimuksen empiirinen osan tarkoituksena on antaa tietoa kahdesta eri aiheesta. Ensinnä tarkastellaan viidennen luokan murtolukujakson oppikirjojen sekä opettajan oppaiden rakennetta, ja erityisesti kiinnitetään huomiota tämän jakson yhteydessä oleviin valmiskokeisiin. Toisena vertaan itse valmistamieni murtolukukokeiden tuloksia oppikirjojen kokeiden antamiin tuloksiin. Esitietona näitä kahta aihetta varten esittelen oppilaiden murtolukujen hallintaa.

Tutkimuksen päätarkoituksena on arvioida, mittaavatko oppikirjojen valmiskokeet luotettavasti oppilaiden osaamista. Kokeiden tehtävien tulisi kattaa kaikki murtolukujakson osa-alueet ja antaa oppilaiden osaamisesta heidän todellista taitotasoaan vastaava kuva (vertaa luku 5.3). Yleisimmistä viidennen luokan oppikirjoista tutkitaan murtolukujakson sisällöt ja jaksoon liittyvä opettajanoppaan valmiskoe. Oppilaat jaotellaan akselille ”*mekaaninen laskutaito – ymmärtävä osaaminen*” sen perusteella, minkälaisia tehtäviä he saavat parhaiten laskettua. Näiden luokittelujen perusteella tutkitaan, ovatko valmiskokeet antaneet oikeudenmukaisen arvosanan oppimistyylisiltään erilaisille oppilaille.

1. Oppikirjojen murtolukujaksojen sisällöt

1.1. Mitä sisältöjä on yleisimmissä viidennen luokan oppikirjoissa?

1.2. Millaisia kysymyksiä on viidennen luokan oppikirjojen murtolukujakson valmiskokeissa ja kuinka kattavasti opetussuunnitelman murtolukujen eri aihealueet käsitellään?

2. Oppikirjojen valmiskokeiden sisällöt ja eri kokeiden tulosten eroavaisuudet

2.1. Miten erityyppiset laskijat menestyvät eri oppikirjojen kokeissa?

2.2. Mitä heikkouksia ja vahvuuksia oppikirjojen valmiskokeista löytyy?

2.3.Millaisia tuloksia antaa oppikirjojen valmiskokeiden rinnakkaisvalidointi itse valmistamillani kokeilla?

Oppilaiden jaottelu eri laskijatyyppeihin selostetaan luvussa 7.3. Oppikirjojen valmiskokeista tarkastellaan kuinka kattavasti eri murtolukujen havaintomallit ja tehtävätyypit ovat niissä edustettuina sekä sitä, kuinka paljon eri oppikirjojen valmiskokeiden tulokset heittelehtivät suhteessa verrokkeina käytettäviin itse valmistamiini kokeisiin.

7. Tutkimusmenetelmät

Opettamisen ja oppimisen tutkimuksessa tarvitaan sekä kvantitatiivisia että kvalitatiivisia menetelmiä. Suurella kvantitatiivisella aineistolla saadaan kattava kokonaisotos tutkittavasta aiheesta, kun taas kvalitatiivisella tutkimuksella voidaan keskittyä ymmärtämään oppimisprosessien luonnetta. (Brown 2004, 105). Metsämuuronen (2005, 244–245) kehottaa miettimään, mikä tiedonkeruun tapa on tutkimuksessa pääosassa, ja millä tavoin saadaan hankittua täydentävää tietoa. Tämä tutkimus on tehty pääosin kvantitatiivisia eli määrällisiä menetelmiä käyttäen. Oppikirjojen murtolukujaksojen ja valmiskokeiden analysoinnissa on lisäksi hyödynnetty kvalitatiivista eli laadullista tutkimustapaa. Metsämuuronen esittelee Denzin kehittämän käsitteen *triangulaatio*, jossa ilmiötä tarkastellaan useammasta eri suunnasta. Denzinin luokittelussa on neljää erilaista triangulaatiota: Monimetodi-menetelmässä käytetään useita menetelmiä tiedon hankkimiseksi, monitutkija-menetelmässä käytetään useita tiedon hankkijoita tai koodaajia, monidata-menetelmässä aineisto kerätään useampaan otteeseen ja moniteoria-menetelmässä käytetään useita kilpailevia teorioita. (Metsämuuronen 2005, 245). Tässä tutkimuksessa on päädytty näistä ensimmäiseen, sillä tietoa on hankittu sekä oppilaita testaamalla että oppikirjojen murtolukujaksoja ja valmiskokeita analysoimalla.

7.1. Murtolukukokeen kehittäminen

Aineiston keruuta varten kehitin itse mittarin eli kaksi murtolukukoetta. Mittarin kehittämiselle itse on kaksi syytä: ensinnä aiemmista tutkimuksista ei löytynyt tarkoitukseen sopivaa mittaria, ja toisekseen murtolukukokeen kehittäminen toimii oppimisprosessina, joka auttaa minua jatkossa sekä opettajan että tutkijan roolissa toimiessani. Vaikka käytössä testattu ja vakiintunut mittari on turvallisempi, koen että oman kokeen kehittäminen on ollut yksi suurimpia hyötyjä tutkielman tekemisessä. Koetehtävien laatimisessa hyödynsin sekä kotimaista että ulkomaista pedagogista kirjallisuutta.

Kehitin tutkimusta varten kaksi koetta, joista ensimmäinen kulkee nimellä *mekaaninen koe*. Se vastaa Wilsonin taksonomian ”laskutaito” –kategoriaa. (Wilsonin taksonomia, katso luku 4.4.) Toista koetta kutsun *ymmärtämiskokeeksi*, ja se kuuluu ”ymmärtäminen” –kategoriaan. Jatkossa näihin kokeisiin viitataan joko sanapareilla mekaaninen ja ymmärrystä mittaava koe tai yksinkertaisesti **koe 1** ja **koe 2**.

Koe 1 mittaa mekaanista laskutaitoa ja koe 2 käsitteen ymmärtämistä. Kahta muuta Wilsonin taksonomian tasoa – analysointi ja soveltaminen - ei näissä kokeissa mitata. Näiden kahden ylimmän tason poisjättämiselle on kolme perustelua. Ensinnä ero kahden alimman tason välinen ero on suuri. Suomalaista matematiikan opetusta on usein kritisoitu liian laskupainotteiseksi ja ymmärrystä väheksyväksi (Hassinen 2006, 47) ja siirtyminen Wilsonin taksonomian toiselle tasolle on mielestäni suuri harppaus eteenpäin. Toisekseen tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat varsin nuoria, noin 12-vuotiata, joten tässä iässä ylimpien kognitiivisten taitojen käyttämisen vaatiminen ei ole perusteltua. (vertaa esimerkiksi Piaget´n ajattelun tasot, luku 3.2.1.) Kolmanneksi opetussuunnitelmassa 3.-5. vuosiluokan ajattelun ja työskentelyn tavoitteissa mainitaan kognitiivisista prosesseista vain ryhmittely, luokittelu ja yhteisen ominaisuuden etsiminen; tiedon soveltaminen astuu mukaan vasta 6.-9. luokan tavoitteissa, analysointi ei vielä silloinkaan (Opetushallitus 2004, 162–163).

Kehittämäni kokeiden tärkeimpänä jakona on erottelu mekaanisiin laskutoimituksiin ja ymmärrystä mittaaviin tehtäviin. Laskutoimituksiin lasken kuuluvaksi peruslaskutoimitukset: yhteen-, vähennys-, kerto- sekä jakolaskun. Katson myös supistamisen ja laventamisen, murtoluvun muuttamisen sekaluvuksi sekä murtolukujen suuruusvertailun kuuluvan mekaanisiin toimituksiin silloin, kun ne suoritetaan puhtaasti symbolikielellä ilman asiaa selittäviä kuvia tai välineitä. Ymmärrystä mittaavia tehtäviä taas ovat edellä mainitut toiminnot kun niihin liitetään kuva tai välineet, ja lisäksi lukusuoratehtävät, sanalliset tehtävät ja piirrostehtävät, joissa oppilas itse tuottaa murtolukua tai laskutoimitusta vastaavan kuvan. Toki esimerkiksi sanallisissa tehtävissä tarvitaan myös mekaanista laskutaitoa, kun tehtävän antama informaatio on purettu matemaattiseksi lausekkeeksi. Nämä kaksi koetta – mekaaninen ja ymmärrystä mittaava – sisältävät samat tehtävätyypit. Kaikille mekaanisen kokeen tehtäville on vastinparinsa ymmärrystä mittaavassa kokeessa. Ymmärrystä mittaava koe on laajempi, sillä siinä on lisäksi lukusuoratehtäviä, sanallisia tehtäviä ja oppilaan itse väritettäviä kuvallisia tehtäviä. Mekaanisen kokeen voidaan katsoa mittaavan proseduraalista tietoa, ja ymmärrystä mittaavan konseptuaalista tietoa (vertaa luku 3.1).

Kokeiden 1 ja 2 seitsemässä ensimmäisessä osiossa jokaiselle tehtävälle on laadittu vastinpari, jossa jokaista mekaanista tehtävää vastaa samaa asiaa mittaava käsitteen ymmärrystä vaativa tehtävä. Täten oletuksena on, että mikäli oppilas osaa samasta aiheesta mekaanisen tehtävän mutta ei käsitteen ymmärrystä mittaavaa tehtävää, on hänellä tästä aiheesta mekaanista taitoa, vaikka käsitteen ymmärryksessä olisi puutteita. Mikäli jonkun oppilaan kohdalla tämä toistuu useassa tehtävässä, luokitellaan tämä oppilas laskutavaltaan mekaaniseksi laskijaksi. Sama toimii tietenkin myös toisinpäin: mikäli oppilas hallitsee käsitteen ymmärrystä mittaavat tehtävät, mutta laskuissa on runsaasti virheitä, on oppilas luokiteltu tyypiltään ymmärtäväksi laskijaksi. Käsitteenymmärrys ja mekaaninen laskenta kytkeytyy myös muistin toimintaan (ks. luku 3.6.) Työhypoteesina on, että mekaaninen laskeminen ulkoa opittuja laskukaavoja käyttämällä ilman syvällistä käsitteenymmärrystä unohtuu ja sotkeutuu helposti tuottaen järjettömiä vastauksia tai täydellisen vastauksen puuttumisen.

TAULUKKO 1: Murtolukukokeiden sisältämät tehtävätyypit.

Tehtävätyyppi	Koe 1 pistemäärä	Prosenttiosuus kokeen 1 kokonaispisteistä	Koe 2 pistemäärä	Prosenttiosuus kokeen 2 kokonaispisteistä
Sekaluku/murtoluku	2	7 %	4	8 %
Suuruusvertailu	2	7 %	4	8 %
Lavennus/supistus	3	11 %	4	8 %
Yhteenlaskut	5	19 %	5	10 %
Vähennyslaskut	5	19 %	5	10 %
Kertolaskut	5	19 %	5	10 %
Jakolaskut	5	19 %	5	10 %
Lukusuoratehtävät	-		4	8 %
Piirtämistehtävät	-		7	15 %
Sanalliset tehtävät	-		5	10 %
YHTEENSÄ	27		48	

Jätin tehtävistä pois murtolukujen yhteyttä desimaali- ja prosenttilukuihin mittaavat tehtävät. Nämä asiat kuuluvat viidennen luokan oppimäärään, ja niitä testataan joissakin viidennen luokan oppikirjojen valmiskokeissa. Kuitenkin tässä tutkimuksessa halusin keskittyä puhtaasti murtolukuihin, joten katsoin perustelluksi jättää desimaali- ja prosenttilaskut pois, vaikka niitä opetetaan joissakin oppikirjoissa murtolukujakson yhteydessä. Murtolukujen ja suhteen välistä suhdetta ei käsitellä tutkimuksessa analysoiduissa oppikirjoissa, vaikka asiaa on huomioitu murtolukuja käsittelevässä pedagogisessa kirjallisuudessa (Lamon 1999, 163–184; Haylock 2006, 154–155; Ikäheimo & Voutilainen 2009, 60–62). Vaikka supistaminen ja laventaminen on sisällytetty opetussuunnitelmassa vasta 6.-9. luokan oppimäärään, se on kuitenkin otettu mukaan tähän kokeeseen. Tähän on kaksi syytä. Ensinnä supistamista ja laventamista on käsitelty suurimmassa osassa tutkituista oppikirjoista. Toisaalta supistaminen ja laventaminen liittyvät murtolukujen ekvivalenssiin, jota pidetään alan pedagogisessa kirjallisuudessa merkittävänä tekijänä murtolukujen käsitteen ymmärtämisessä.

Koe suoritettiin ilman laskinta, sillä yhtenä päätarkoituksena on tutkia kuinka käsitteenymmärrys vaikuttaa mekaaniseen päässä tai kynän ja paperin avulla suoritettavaan laskemiseen. Näin laskimen käyttö olisi vääristänyt tätä asetelmaa. Murtolukujen peruslaskutoimitukset voidaan katsoa myös kuuluvaksi sellaiseen osaamiseen, joka on hallittava ilman laskinta, vaikka laskimen ja tietokoneiden käyttö laskemin apuna onkin nykyään muuten perusteltua myös koulumaailmassa (Näveri 2009, 98). Kaikki kokeiden tehtävät liikkuivat myös niin pienellä lukualueella, että laskinta ei siitäkään syystä tarvita.

Pyrin suunnittelemaan koetehtävät niin, että tehtäviin on olemassa yksiselitteiset vastaukset, jotka voidaan pisteyttää yksinkertaisesti ja luotettavasti. Tämä ei ollut helppoa, sillä tavallisen oppilaiden tason mittaamisen lisäksi tehtävien pisteytyksessä tuli ottaa huomioon tutkimuksellinen näkökulma. Pyrin myös tarkastelemaan pisteytystä kokonaisuutena, siten että eri osioiden yhteispistemäärät vastaavat painotukseltaan opetussuunnitelman sisältöjä ja tämän tutkimuksen tarpeita. Koska suhteelliseen arvosteluun liittyy luvussa 5.3. kuvailtuja ongelmia, on tämän tutkimuksen kokeiden laadinnassa lähdetty kriteeripohjaisesta arvioinnista. Tutkimuksessa käytettyjen kriteerien pohja on haettu opetussuunnitelman perusteiden hyvän osaamisen kuvauksesta murtolukujen osalta. Rajojen määrittelyssä käytin asiantuntija-apua, jotta määrittely ei jäisi pelkän oman mielipiteeni varaan. Ulkopuolisina asiantuntijoina toimivat matematiikan opetuksen kouluttaja Hannele Ikäheimo ja Helsingin matematiikkalukion linjajohtaja Ville Tilvis. Kaikkien kolmen arviot olivat hyvin yhteneviä, suurimmassa osassa pisterajojen vaihtelu oli korkeintaan yhden pisteen suuruista, ja monet arvioista olivat täysin samoja. Laskemalla keskiarvot kolmen arvioitsijan ehdotuksista päädyin seuraaviin pisterajoihin:

TAULUKKO 2: Hyvän osaamisen rajat murtolukutehtävien eri osa-alueille.

	YHTEENSÄ	Heikko	Kohtuullinen	Hyvä
1=sekaluvun muutto murtoluvuksi	6	0-2	3-4	5-6
2=suuruusvertailu	6	0-2	3-4	5-6
3=supistaminen ja laventaminen	7	0-3	4-5	6-7
4=yhteenlasku (samannimisten)	10	0-4	5-7	8-10
5=vähennyslasku (samannimisten)	10	0-4	5-7	8-10
6=kertolasku (kokonaisluvulla)	10	0-4	5-7	8-10
7=jakolasku (kokonaisluvulla)	10	0-4	5-7	8-10

Olen jaotellut käsitteen ymmärrystä mittaavien tehtävien kuvalliset mallit samoin kuten Strang lisensiaattityössään pintamalleihin, joukkomalleihin ja lukusuoramalleihin (Strang 1989, 27). Sekä sanallisissa tehtävissä että piirrostehtävissä käytetään pintamalleja ja joukkomalleja tehtävien havainnollistamisessa, ja lukusuoramallin osaamisesta mittaamassa on oma osionsa.

Sanallisten laskujen ja piirrostehtävien sisältöihin olen kiinnittänyt erityistä huomiota siten, että ne sisältävät sekä pinta-ala- että joukkomallin käyttämistä vaativia tehtäviä. Piirrostehtävissä erityisesti huomioin sen, että oppilaiden osaamista vaaditaan muullakin kuin ympyränmuotoisella ”pitsamallilla”, joka opetuksessa on yleisin ja johon oppilaat ovat tottuneet (Lamon 1999, 31; 46–48). Vaihtelevien kuvioiden käytöllä testataan oppilaiden kykyä yleistää oppimiaan asioita, mikä on erityisesti matematiikan opetuksessa tärkeää (Lamon 1999, 22–23). Sanallisissa tehtävissä mitattiin sekä osan ottamista joukosta että kokonaisen jakamista osiin. Kaksi ensimmäistä tehtävää ovat puhtaasti osan ottamista joukosta, ja kaksi seuraavaa havainnollistuvat pinta-alamallilla. Erityisen kiinnostava tehtävä 10e, jossa yksi kokonainen ei olekaan totutusti yksi pitsa vaan yksi laatikko, joka sisältää kolme pitsaa. Vastaavaa osaamista koetellaan tehtävissä 9b) ja 9c), jossa pitää ensin ymmärtää mikä on yksi kokonainen, ennen kuin siitä voi ottaa halutun osan (vertaa Lamon 1999, 46–48).

Murtolukujen suuruusvertailu voidaan jakaa kolmenlaisiin tehtäviin. Lamonin mukaan helpoin tapaus on, kun nimittäjät ovat yhtä suuret ja vain osoittajat vaihtelevat. Tehtävä muuttuu vaikeammaksi, kun osoittajat ovat yhtä suuret ja nimittäjät eri suuruiset. Vaikein tapaus on, kun sekä osoittajat että nimittäjät ovat erisuuret (Lamon 1999, 148–149). Kokeessani nämä kaikki kolme tyyppiä ovat edustettuna. Ymmärtämiskokeen tehtävä 2 c edustaa jälkimmäisintä tyyppiä ja voi tuntua aluksi vaikealta, mutta ratkeaa helposti kun vertaa murtolukujen suuruutta puolikkaaseen ja yhteen kokonaiseen. Bray ja Abreu-Sanches aloittavat vastaavalla esimerkillä artikkelinsa lukukäsityksen käyttämisestä murtolukujen arvioinnissa, missä he korostavat päättelystrategioiden merkitystä matemaattisessa ajattelussa. (Bray & Abreu-Sanches 2010, 91). Neljäntenä on visuaalinen tehtävä, jossa pitää ymmärtää että murtoluvuissa ei ole kyse absoluuttisista määristä vaan osuuksista, joten vain suuremman pinta-alan valitsemalla ei löydä suurinta osuutta yhdestä kokonaisesta (vertaa Ball 1990, 6).

Lukusuoratehtävät ovat erittäin vähän edustettuina suomalaisissa oppikirjoissa ja sitä myöten suomalaisten oppikirjojen kokeissa. Esimerkiksi angloamerikkalaisessa kirjallisuudessa niitä painotetaan huomattavasti enemmän. Lukusuoran toiminta ja sen ymmärtämisen hyödyntäminen on hyödyllinen apuväline matemaattisten tehtävien ratkaisemiseksi, joten lukusuoraa ei kannattaisi väheksyä murtolukujenkaan yhteydessä. Erityisen tärkeää tämä olisi siksi, että rationaaliluvut käyttäytyvät lukusuoralla eri tavalla kuin kokonaisluvut, joten lukusuoran ymmärtäminen vain kokonaislukujen osalta ei riitä rationaaliluvuilla operoimiseen (Saxe et al. 2007, 223). Koska lukusuoraa on käytetty vain vähän opetuksessa, tyydyin testaamaan omissa tehtävissäni vain oikean murtoluvun päättelemistä. Myös esimerkiksi laskutoimituksia olisi mahdollista havainnollistaa ja testata lukusuoralla esimerkiksi Riedeselin ja Callahanin (1977, 208–213) käyttämillä tehtävillä.

7.2. Esitestaus ja aineiston keruu

Kokeen muokkaamisen aloitin tutustumalla nykyisiin oppikirjojen kokeisiin sekä murtolukujen opettamista ja oppimista käsittelevään pedagogiseen kirjallisuuteen. Ennen kokeen ensimmäisen version esitestausta kävin kaikki tekemäni koetehtävät läpi yhdessä matematiikan opetuksen kouluttaja Hannele Ikäheimon kanssa. Ensimmäisen esitestauksen tein erään pääkaupunkiseutulaisen koulun kuudennessa luokassa. Esitestauksen jälkeen edellisessä luvussa kuvattu jaottelu selkiintyi, ja muokkasin varsinaisen kokeen tehtävät jaotteluun sopiviksi. Lisäksi poistin tai muutin yksittäisiä tehtäviä, mikäli ne osoittautuivat liian helpoiksi tai vaikeiksi. Esitestaus antoi myös hyödyllistä tietoa kokeen graafisesta suunnittelusta, pisteytyksestä, tulosten kirjaamisesta sekä oppilaiden ohjeistamisesta koetilanteessa.

Ensimmäisen esitestauksen jälkeen suoritin vielä toisen koetestauksen, jossa kokonaisrakenteen selvittyä tarkoituksena oli enää hioa yksittäisiä tehtäviä. Tässä erityishuomion kiinnitin laskutehtäviin, joissa on kuvia apuna. Halusin selvittää millaiset kuviot auttavat oppilaita, ja siksi tässä esitestissä eri oppilaat saivat erilaisen kokeen tehtäväkseen. Laskutehtävät itsessään olivat samat, mutta niihin avuksi tulleet havaintokuvat olivat erilaiset. Toisena testattavana asiana olivat sanalliset tehtävät. Ensimmäisessä esitestauksessa olin huomannut monilla oppilailla olevan vaikeuksia piirtää vastauksia ja laskutehtäviä. Kokeen erottelevuuden parantamiseksi kiinnitin huomiota sekä tehtävien muokkaamiseen että oppilaiden ohjeistukseen koetta edeltävässä tilanteessa.

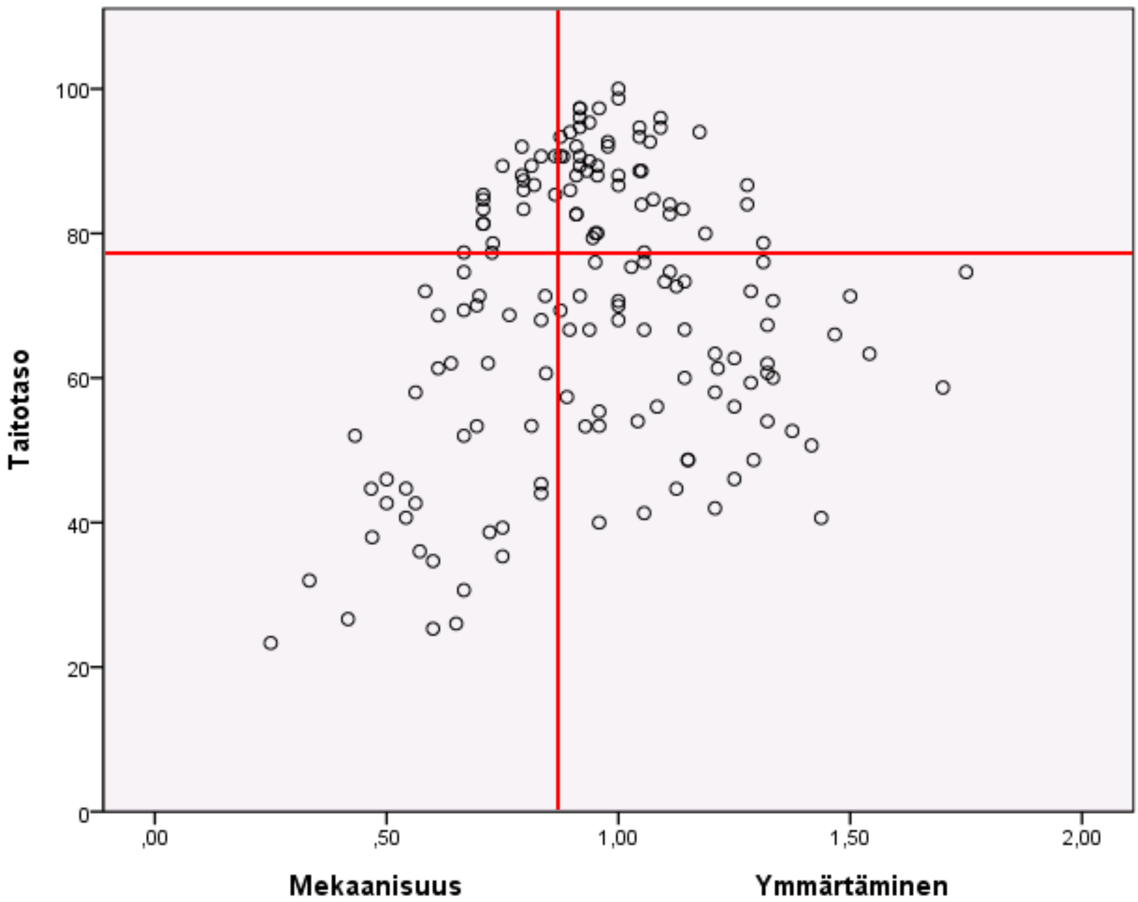
Kahden esitestin jälkeen suoritin varsinaisen testauksen seitsemässä kuudennessa luokassa kolmessa eri pääkaupunkiseutulaisessa koulussa. Tutkimuksessa olevien luokkien valinnassa oli kiinnitetty huomiota siihen, kuinka paljon opettaja käyttää matematiikan opetuksessaan havainto- ja toimintavälineitä. Tässä tukeuduttiin opettajien omaan arvioon opetusmetodeistaan. Lisäksi tutkimuksessa mukana olleilla luokilla oli käytössä eri oppikirjasarjoja. Koska tutkimus tehtiin syksyllä pääsääntöisesti ennen kuin murtolukuja oli kuudennella luokalla opetettu, tärkeäksi tekijäksi oppilaiden osaamisessa nousi pitkäaikaisen muistin toiminta. Tutkimusten mukaan matemaattisten käsitteiden ymmärtäminen vahvistaa juuri pitkäkestoisen muistin toimintaa (Driscoll 1984, 34). Pinnalliset oppimisstrategiat johtavat muistisääntöjen ulkoa opetteluun, ja ajan myötä nämä muistisäännöt helposti sekaantuvat ja niiden varassa suoritetut laskutoimitukset muuttuvat järjettömiksi. Huhtala ja Laine (2004, 326–329) kutsuvat näitä virheellisiä laskusääntöjä ”miniteorioiksi”. Näveri on luetellut väitöskirjatutkimuksessaan ilmitulleita yleisiä virhetyyppejä murtolukujen osalta. Virheiden syntymisessä hän painottaa pinnallista muistinvaraista ajattelua sekä puutteellista käsitteenmuodostusta (Näveri 2009, 102–103). Erityisesti ymmärtämiskokeeseen hain tehtäviä, joiden oikea ratkaisu vaatii käsitteen ymmärtämistä. Kuitenkin murtolukujen ollessa kyseessä myös mekaanisten laskujen suorittaminen vaatii hyvää käsitteen hallintaa, sillä tehtävien ratkaisu vain kokonaislukuskeemojen kautta antaa virheellisiä vastauksia.

7.3. Mekaanisen laskemisen ja käsitteen ymmärtämisen suhdeluku

Tulosten analysointia varten kehitin suhdeluvun, joka kuvaa oppilaan sijoittumista akselille ”mekaaninen – ymmärtävä” laskija. Valmistamieni kahden kokeen kaikki tehtävät on luokiteltu joko ymmärrystä mittaaviksi tai mekaanisiksi. Näiden tehtävien osaamisesta on laskettu jokaiselle oppilaalle prosenttiluku suhteessa maksimipisteisiin. Suhteen laskeminen tapahtuu yksinkertaisesti kaavalla mekaaniset laskut jaettuna ymmärtämistehtävillä. Jos oppilas on saanut esimerkiksi mekaanisista laskuista 72 prosenttia ja ymmärtämistehtävistä 50 prosenttia oikein, on hänen suhdelukunsa 0,72/0,5=1,44.

Mikäli luku on yli yhden, on oppilas osannut paremmin ymmärtämistehtäviä kuin mekaanisia laskuja; mikäli alle, on hän osannut mekaaniset laskut paremmin. On huomioitavaa, että tämä luku ei kerro mitään osaamisen tasosta, vaan ainoastaan laadusta. Korkea ymmärryssuhde ei kerro vain siitä että oppilas on saanut hyvät pisteet ymmärrystehtävissä, vaan lisäksi sen, että hänellä on ollut ongelmia laskutehtävissä. Suhdeluvun keskiarvo oli 0,9456 ja keskihajonta 0,2659. Hajonta on kohtuullisen suurta, mikä kertoo siitä, että oppilaiden erot tämän luokittelun mukaan ovat selkeitä. Koska tutkielman teoriaosassa matemaattisen käsitteen hyvä ymmärtäminen määriteltiin kattavaksi sekä laskutoimitukset että käsitteen ymmärtämistä mittaavat tehtävät, on täten ideaali suhdeluku mahdollisimman lähellä ykköstä.

KUVAAJA 1: Osaamisen ja mekaanisuuden hajontakuvio.



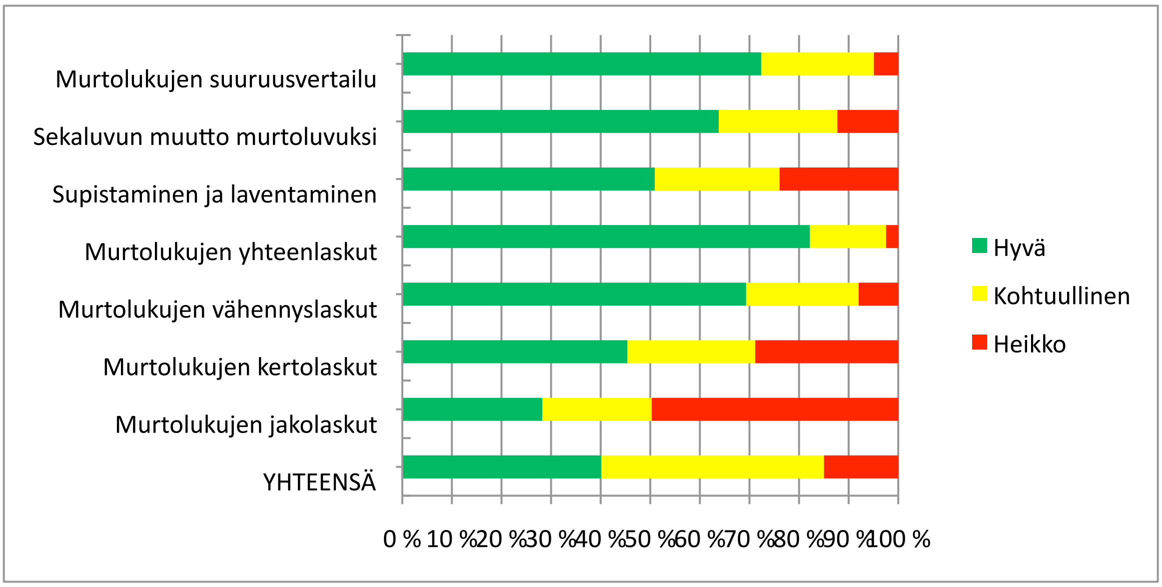
Kuvaajassa 1 on esitetty oppilaiden sijoittuminen mekaanisuuden ja taitotason muodostamaan nelikenttään. Taitotason mediaani on 76,85 prosenttia kokonaispisteistä ja mekaanisuuden/ymmärtävyyden 0,9375. Mediaanin ylittäneet oppilaat luokiteltiin ymmärtäviksi laskijoiksi ja loput mekaanisiksi. Kuvaajasta näkyy, että erityisen heikot osaajat ovat tyypiltään mekaanisia, kun taas taitavissa oppilaissa on enemmän ymmärrykseen painottuvaa tyyppiä. Osaamisen lähestyessä sataa prosenttia suhdeluvun vaihteluväli pienenee, sillä tälle tasolle päästäkseen oppilaan on täytynyt osata lähes kaikki tehtävät, sekä mekaaniset että käsitteen ymmärrystä mittaavat. Täten kuvio väistämättä kapenee taitotason huippua lähestyttäessä.

8. Tulokset

Tämän tutkimuksen empiirisen osan tulosten tarkastelun olen jakanut kahteen osaan: viidennen luokan oppikirjojen murtolukujaksojen tarkasteluun ja oppikirjojen valmiskokeiden ja omien kokeideni tulosten poikkeavuuksien analysointiin. Tätä ennen etukäteistietona esitän kuitenkin tutkimuksessa mukana olleiden oppilaiden murtolukujakson hallintaa tiivistetysti.

Jaoin kokeissani murtolukujen osaamisen seitsemään osa-alueeseen: neljään peruslaskutoimitukseen, sekaluvun ja murtoluvun muunnoksiin, murtolukujen suurusvertailuun sekä supistamiseen ja laventamiseen. Osaamisen taso jaettiin kolmeen kategoriaan: hyvä, kohtuullinen ja heikko. Oppilaiden osaaminen on kuvattu seuraavassa kuvaajassa (n=163):

KUVAAJA 2: Murtolukutehtävien osaaminen aihealueittain kokeissa 1 ja 2.



Tarkat arvot löytyvät liitteestä 6.

Parhaiten oli osattu murtolukujen suuruusvertailu sekä yhteen- ja vähennyslaskut. Supistamisessa ja laventamisessa ilmeni selkeitä ongelmia, mutta erityisen vaikeita olivat kerto- ja etenkin jakolaskut. Jakolaskujen tilanne on suorastaan hälyttävä, sillä lähes puolilla oppilasta osaaminen oli heikkoa. Pitää muistaa, että testitilanne poikkesi normaalista kouluopetuksesta siinä, että koe tehtiin vähintään puoli vuotta sen jälkeen, kun murtolukujakso oli opetettu. Kerto- ja jakolaskut käydään läpi ensimmäisen kerran viidennellä luokalla. Tutkimuksen tulos antaa ymmärtää, että opetus ei ole jäänyt suurimmalle osalle oppilaista pysyvään muistiin. Kirjallisuuden perusteella käsitteen ymmärtäminen parantaa pitkäkestoisen muistin toimintaa, joten voidaan arvella, että murtolukujen kerto- ja jakolaskun käsitteenymmärryksessä on puutteita.

Ymmärryssuhdeluvun (katso luku 7.3.) vaikutusta eri osa-alueisiin tutkin ristiintaulukoimalla aihealueittain kokonaisosaamistason ja oppimistyypin. Horisontaalinen ”heikko-vahva” –luokittelu kuvaa siis tulosta kokonaispisteissä ja vertikaali ”heikko-kohtuullinen-hyvä” –jako kertoo juuri tämän osion menestyksestä. Ristiintaulukointi tuotti hieman yllättävän tuloksen. Hyvistä oppilaista käsitteen ymmärtäjät saivat samanlaisia tuloksia lähes kaikissa osa-alueissa, mutta tuloksiltaan heikot oppilaat pärjäsivät paremmin, mikäli he kuuluivat ymmärtävään kategoriaan. Tätä trendiä kuvastaa esimerkiksi ”sekaluvun muunto murtoluvuksi” –tehtävät:

TAULUKKO 3a: Sekaluvun muunto murtoluvuksi osaamistyypeittäin.

		Nelikenttä ymmärtämisestä ja osaamisesta				
		heikko mekaaninen	heikko ymmärtävä	vahva mekaaninen	vahva ymmärtävä	Yhteensä
Sekaluvun muunto murtoluvuksi	Heikko	12	6	1	1	20
	Koht.	15	15	6	3	39
	Hyvä	11	21	36	36	104
Yhteensä		38	42	43	40	163

Vaikka oppilaat olisivat laskutaidoltaan heikkoja, pystyvät he kuitenkin päättelemään vastauksen käsitteen ymmärtämisen perusteella. Sama toimii laskutoimituksissa yhteen– ja vähennyslaskun ollessa kyseessä. Näissä tosin hyvien oppilaiden vertailu on hankalaa, sillä tehtävät ovat olleet heille niin helppoja että lähes kaikki ovat saavuttaneet hyvän tason. Esimerkkinä yhteenlaskut:

TAULUKKO 3b: Murtolukujen yhteenlaskujen hallinta osaamistyypeittäin.

		Nelikenttä ymmärtämisestä ja osaamisesta				Yhteensä
		heikko mekaaninen	heikko ymmärtävä	vahva mekaaninen	vahva ymmärtävä	
Murtolukujen yhteenlaskut	Heikko	1	3	0	0	4
	Koht.	15	7	3	0	25
	Hyvä	22	32	40	40	134
Yhteensä		38	42	43	40	163

Kerto- ja jakolaskuissa tilanne on kuitenkin täysin päinvastainen. Mekaaniset laskijat ovat pärjänneet selkeästi paremmin.

TAULUKKO 3c: Murtolukujen kertolaskujen hallinta osaamistyypeittäin.

		Nelikenttäymmärtämisestä ja osaamisesta				Yhteensä
		heikko mekaaninen	heikko ymmärtävä	vahva mekaaninen	vahva ymmärtävä	
Murtolukujen kertolaskut	Heikko	21	31	1	3	56
	Koht.	9	8	8	8	33
	Hyvä	8	3	34	29	74
Yhteensä		38	42	43	40	163

Erityisesti jakolaskut ovat olleet heikoille oppilaille liian vaikeita, mutta myöskään hyvistä oppilaista vain kolmannes ymmärtävistä osaajista on saanut laskettua ne hyvällä tasolla.

TAULUKKO 3d: Murtolukujen jakolaskujen hallinta osaamistyypeittäin.

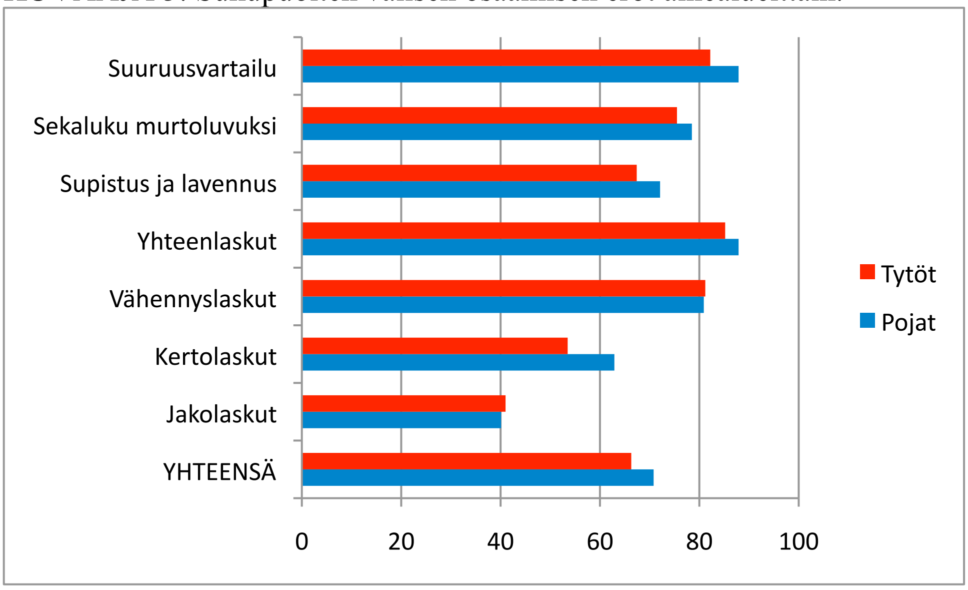
		Nelikenttä ymmärtämisestä ja osaamisesta				Yhteensä
		heikko mekaaninen	heikko ymmärtävä	vahva mekaaninen	vahva ymmärtävä	
Murtolukujen jakolaskut	Heikko	34	40	5	16	95
	Koht.	4	1	6	11	22
	Hyvä	0	1	32	13	46
Yhteensä		38	42	43	40	163

(Loput taulukot liitteessä 6).

Johtopäätöksenä tästä esitän, että kerto- ja jakolaskun käsite on viidennen luokan oppilaille niin vaikea, että suurin osa ei pysty päättelemään vastausta pelkän käsitteen ymmärtämisen perusteella, vaan tarvitsee luotettavaa laskualgoritmin hallintaa. Helpoimmissa aiheissa käsitteen ymmärtäminen auttaa selvästi, vaikka laskutaidoissa olisi puutteita.

Tutkin osaamisen eroja myös sukupuolten välillä. Uusimmassa vuoden 2009 PISA-tutkimuksessa ja matematiikan kansallisessa oppimistulosten vertailussa pojat ovat saaneet molemmissa hieman paremman tuloksen, mutta kummassakaan ero ei ole ollut tilastollisesti merkitsevä (Sulkunen et al. 2010, 32; Niemi 2010, 56). Kansallisten ja kansainvälisten tutkimusten antama tieto toimii tämän tutkimuksen hypoteesin pohjana, joten oletuksena on, että tyttöjen ja poikien osaamisessa ei ole tilastollisesti merkitseviä eroja.

KUVAAJA 3: Sukupuolten välisen osaamisen erot aihealueittain.

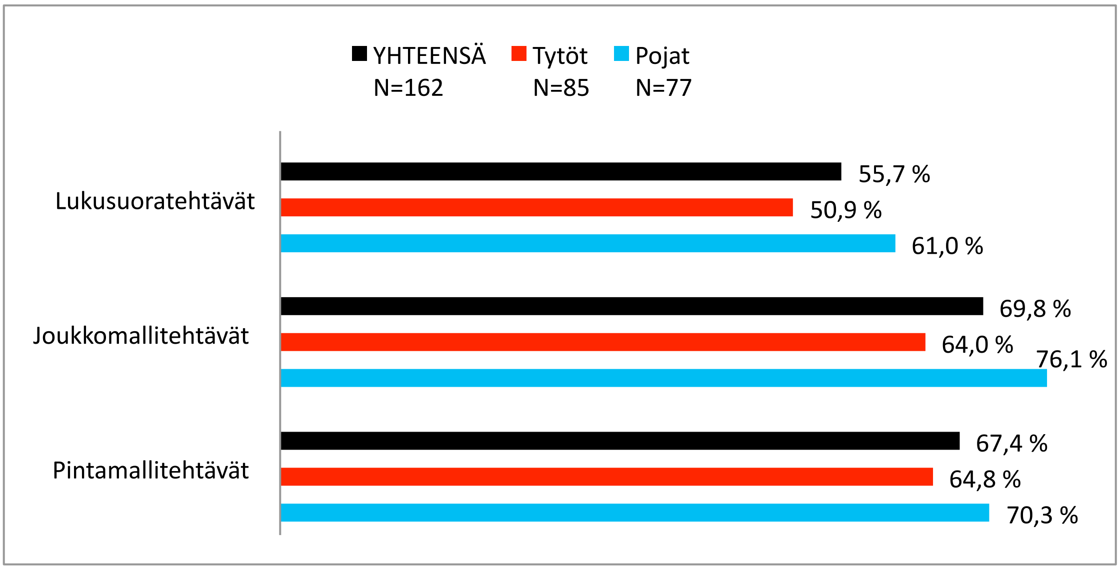


(Tarkat arvot liitteessä 6)

Pojat suoriutuivat tyttöjä paremmin lähes kaikilla osa-alueilla. Vain vähennyslaskuissa ja jakolaskuissa tytöt menestyivät paremmin. Sukupuolten väliset erot eivät kuitenkaan ole tilastollisesti merkitseviä millään osa-alueella eivätkä yhteistuloksissa (ks liite 6). Tarkistin myös kohtelevatko oppikirjojen kokeet sukupuolia tasapuolisesti. Yksisuuntaisen varianssianalyysin mukaan sukupuolten välillä ei ollut tilastollisesti merkittäviä eroja yhdenkään kokeen kohdalla (katso liite 6).

Seuraavassa taulukossa esitetään eri murtolukumallien hallintaa. Pojat ovat olleet kaikilla malleilla mitattuina hiukan tyttöjä parempia.

KUVAAJA 4: Eri murtolukumallien hallinta sukupuolittain.



8.1. Oppikirjojen murtolukujaksojen sisällöt

Vuoden 2008 kansallisen oppimistulosten arvioinnin perusteella Joutsenlahti & Vainionpää (2010, 143) päätyvät toteamaan, että nykytilanteessa muut tekijät oppimiseen vaikuttavat tekijät ovat oppikirjaa tärkeämpiä oppimistulosten selittäjänä. Tämän tutkimuksen päähuomio ei ole itse oppikirjoissa, vaan niiden valmiskokeissa. Oppikirjojen murtolukujaksojen kuvailu on kuitenkin oleellista, jotta voidaan tarkastella vastaavatko valmiskokeet sitä, mitä oppikirjoissa opetetaan.

Tarkastelun kohteena on kolme eri kirjasarjaa: *Laskutaito*, *Tuhattaituri* ja *Matikkamatka*. Nämä oppikirjat kattavat yli 98 % viimeisimpään kansalliseen matematiikan osaamistutkimukseen osallistuneista suomenkielistä oppikirjaa käyttävistä kuudennen luokan oppilaista, joten niiden merkitys matematiikanopetuksessa Suomessa on suuri (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 142). Nämä ovat myös kirjasarjat, jotka ovat käytössä tämän tutkimuksen empiiriseen osaan osallistuneissa luokissa. Oppikirjoista tarkasteltiin murtolukujakson sisältöä ja opetusmenetelmiä sekä opettajanoppaan neuvoja opetuksen suunnitteluun. Lisäksi verrattiin sitä, millaista oppimisnäkemystä opettajanoppaan valmiskokeet heijastavat, ja kuinka ne vastaavat oppikirjan ohjeiden mukaista opetusta.

Tutkituista oppikirjoista löytyi didaktisia neuvoja kolmesta paikasta: kirjan alussa yleismatemaattista didaktiikkaa, murtolukujakson alussa murtolukujen oppimiseen liittyviä erityispiirteitä ja jokaisen oppitunnin kohdalla juuri kyseisen tunnin asioihin liittyviä ohjeita. Jokaisen kirjasarjan kohdalla on tarkasteltu näiden ohjeiden löytymistä ja laajuutta. Lopussa on myös tarkasteltu kuinka kirjojen valmiskokeet vastaavat oppikirjojen sisältöä ja opetustapaa.

TAULUKKO 4: Viidennen luokan oppikirjojen murtolukujakson sisällöt.

	LT	TT	MM
Kertaus	x	x	x
Sekaluku	x	xxx	x
Supistaminen	x	xx	x
Laventaminen			x
Laventaminen samannimiseksi			x
Samannimisten yhteenlasku	x	x	x
Samannimisten vähennyslasku	x	x	x
Kertominen luonnollisella luvulla	x	x	x
Jakaminen luonnollisella luvulla	x	x	x
kertolaskun ja laventamisen ero			x
Jakolaskun ja supistamisen ero			x
Osan ottaminen luvusta		x	x
Murto- ja desimaaliluvun yhteys	x		
Murto- ja prosenttiluvun yhteys	x		
Jakson päättävä kertaus	x	xx	x
Oppilaan kirjan murtolukujakson sivumäärä	23	55	34

LT = Laskutaito, TT = Tuhattaituri, MM = Matikkamatka. Useampi rasti tarkoittaa, että asiaa on käsitelty useammalla aukeamalla.

8.1.1. Laskutaito 5 (kevät) 2006

Sekä kirjan että jokaisen jakson alussa on lyhyt kuvaus nykyaikaisesta matematiikan oppimiskäsityksestä sekä neuvoja opettajalle. Malleista otetaan huomioon pinta-, lukusuora- ja joukkomalli. Havaintokuvissa on runsaasti erimuotoisia mallikuvioita. Joukko- ja lukusuoramallit ovat huomioidut lyhyesti. Murtolukujakso jatkuu yhteydellä desimaali- sekä prosenttilukuihin, mikä on didaktisesti perusteltua sillä nämä ovat läheisessä yhteydessä toisiinsa (Galen et al. 2008, 27). Jakson alussa olevat ohjeet sisältävät ohjeistuksen tukiopetukseen sekä runsaasti eriyttäviä tehtäviä. Oppilaan kirja on laskemiseen painottuva, mutta opettajanoppaassa on runsaasti pelejä, leikkejä ja ongelmatehtäviä, joilla oppituntien rakenteeseen voi saada vaihtelua. Laskimen käyttö on huomioitu opettajanoppaassa olevissa laskinpeleissä.

Havainto- ja toimintamateriaalit: Yleisohjeissa on huomioitu erilaiset murtokiekko- ja murtokakkumallit, kuten myös joukkomallia havainnollistavat esineet, kuten napit palikat tai loogiset palat. Opettajaa kehotetaan myös valmistamaan itse tarvittavia välineitä.

8.1.2. Tuhattaituri 5a (syksy) 2005/2010

Tuhattaiturista on julkistettu vuonna 2010 uusi painos. Tutkimuksen aineistonkeruuvaiheessa kaikki Tuhattaituria käyttäneet luokat pitäytyivät vielä 2005 painoksessa. Tässä arvioinnista on kuitenkin otettu huomioon molemmat painokset, sillä 2010 painos syrjäyttänee nopeasti vanhan.

Tuhattaiturin yleisohjeet alussa ovat suppeat. Jakson alussa ei ole mitään mainintaa murtolukujen erityispiirteistä. Oppituntien kohdalla on ohjeet, mutta ei didaktisia perusteluja. Tuhattaituri on ainoa kirjoista, jossa on valmiit taulutyön ohjeet. Ne koostuvat kuitenkin pelkistä sanallisesti kuvailevista ohjeista ja mekaanisista laskuesimerkeistä ilman havainnollistavaa kuvitusta. Kaiken kaikkiaan Tuhattaituri on kirjasarjoista se, joka antaa opettajalle vähiten didaktisia neuvoja ja liikkumavaraa oman opetuksen suunnitteluun. Vuoden 2010 painokseen didaktiikan määrää on lisätty, ja joka tunnin kohdalta löytyy osio ”pedagogisia vinkkejä”.

2010 painoksessa tehtävien piirtäminen korvattu murtokakkujen käytöllä, joita käytetään johdonmukaisesti koko jakson ajan. Tätä tukee Laycockin käsitys murtolukujen opettamisesta, jossa lapset eivät opi vain näkemällä murtolukuja, vaan koskemalla niitä (Laycock 1983, 42). Tuhattaiturissa on eniten tehtäviä tutkituista kirjasarjoista: 2006 painoksessa aihekokonaisuudet ovat kolmen sivun pituiset, 2010 painoksessa kahden aukeaman. Jakson alussa on runsaasti kuvitusta, jakson loppupuoli koostuu lähes täysin mekaanisista ja sanallisista laskutehtävistä. Jo 2005 painoksessa on mukana toiminnallinen tunti, mutta 2010 painoksessa oppilaiden omaa toimintaa lisätty myös muilla tunneilla. 2010 painoksessa ulkoasua entisestään selkeytetty. Joukkomallin käyttö vähäistä, lukusuoraan ei viitata lainkaan. Tuhattaituri on kirjasarjoista ainoa, jossa murtolukujen jakso ei jatku prosentti- ja desimaaliluvuilla. Tätä voidaan pitää negatiivisena asiana, sillä käsitteenä nämä kolme ovat lähellä toisiaan, ja niiden opettaminen toisiinsa liittyen vähentää oppilaiden kognitiivista kuormitusta ja siten parantaa oppimistuloksia (Perkkilä 2002, 49; Galen et al. 2008, 27).

Havainto- ja toimintamateriaalit: 2010 painoksessa opettajaa neuvotaan käyttämään koko jakson aikana tuntiohjeissa Tuhattaiturin murtokakkuja. Yhtenä hauskana integrointi-ideana äidinkieleen on pelata sanapeli Aliasta matemaattisilla käsitteillä. Vuoden 2010 painokseen on lisätty huomattavasti toimintamateriaalin käytön osuutta.

8.1.3. Matikkamatka 5 (syksy) 2004

Tutkituista oppikirjoista Matikkamatkan yleisohjeet kirjan alussa ovat kattavimmat ja didaktisesti pätevimmät, kuten myös jaksokohtaiset ohjeet. Tuntikohtaiset ohjeet ovat hieman suppeammat kuin esimerkiksi Laskutaidossa. Matikkamatkassa on ainoana kirjasarjoista ennakoitu tukiopetuksessa myös ennakoiva tukiopetus. Opettajanoppaat valmistestit sisältävät myös diagnosoivan testin jakson aluksi, ja arvioinnissa on huomioitu oppilaan itsearviointi lisäämällä se teemaksi osana kertaussivuja. Oppilaan kirjan kuvituksessa ja tehtävien aihevalinnoissa on selvästi haettu oppilaita kiinnostavia aiheita. Eri murtolukumallit (katso kappale 3.3.) on huomioitu kattavimmin. Pintamalleista on useita erilaisia kuvioita kaavamaisen ajattelun välttämiseksi ja lukusuoramalli on selvästi enemmän esillä kuin muissa kirjasarjoissa. Didaktisena helmenä on kertolaskun ja laventamisen erolle omistettu oma sivu, jolla asiaa käydään läpi kuvallisesti, sanallisesti ja esimerkkitehtävien kautta. Jaksoon sisältyy myös runsaasti murtolukuihin liittyviä pelejä ja ongelmatehtäviä. Opettajan oppaan ulkoasu on kirjoista sekavin, vaikkakin erot muihin kirjasarjoihin ovat tässä suhteessa pieniä ja kaikki tarpeellinen informaatio löytyy.

Havainto- ja toimintamateriaalit: Opettajanoppaan alussa on omistettu sivu matematiikan oppimisvälineille, jossa yhteydessä on mainittu pinta- ja pitsamallit sekä murtokakut. Tuntikohtaisissa ohjeissa opettajalle on annettu esimerkkejä taululle tehtävistä mallikuvioista.

8.1.4. Yhteenveto oppikirjojen murtolukujaksoista

Oppikirjojen ainesisällöt ja myös niiden opettamisjärjestys ovat kolmannelta viidennelle luokalla lähes yhtenevät. Matikkamatka tukee eniten opettajan omaa didaktista osaamista ja antaa eväitä opetusjakson kokonaisvaltaiseen suunnitteluun huomioiden opetuksen pitkäjänteisyyden. Toisaalta siinä on vähiten mekaanisia laskuja, ja voidaan jopa kysyä, jääkö oppilaiden mekaaninen laskutaito riittämättömäksi. Laskutaito on opettajalle selkein käyttää, ja täten onkin ymmärrettävää, että se on käytetyin matematiikan oppikirjasarja

Suomessa (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 142). Sisällöt ovat järjestelmällisesti jaotellut, ja ne tukevat normaalin oppitunnin rakennetta. Laskutaidosta löytyy myös pedagogisia vinkkejä, mutta niiden osuus on pienempi kuin Matikkamatkassa. Tuhattaituri on tutkituista kirjasarjoista mekaanisin ja eniten laskemiseen painottuva. Tämä tulos on vastaava kuin Joutsenlahden ja Vainionpään tutkimuksessa, jossa Tuhattaiturin tehtävistä avoimia tehtäviä oli kahdeksan prosenttia, kun Matikkamatkan ja Laskutaidon vastaavat luvut ovat 16 ja 13 prosenttia (Joutsenlahti & Vainionpää 2007, 186). Tehtäviä Tuhattaiturissa on eniten; yhden oppitunnin kokonaisuudet ovat kahden aukeaman kokoisia, kun ne muissa oppikirjoissa ovat vain yhden aukeaman mittaisia. Ohjeet opettajalle ovat lyhytjänteisiä, lähinnä yhden oppitunnin läpiviemiseen ohjaavia. Perkkilän (2002, 50) mukaan liian yksityiskohtaiset ohjeet jokaiselle oppitunnille voivat johtaa tilannesidonnaiseen oppimiseen. Kirjassa on kuitenkin ongelmanratkaisua kaikissa jaksoissa, ja oppilaan omaa aktiivisuutta ja toimintamateriaalien käyttöä on lisätty erityisesti uudessa 2010 painoksessa.

Missään kirjassa ei käsitellä yhden kokonaisen yksikön (*unit*) määrittelyä kattavasti (vertaa Lamon 1999, 23–24). Esimerkiksi Matikkamatkan kertolaskua käsittelevässä esimerkkitehtävässä (Matikkamatka 5 syksy, 90) voi saada käsityksen, että kolme suorakulmiota yhdessä muodostavat yhden kokonaisen, joka on täten jaettu viiteentoista osaan (katso alla oleva kuva 7). Vastaavia ongelmia esiintyy kaikissa tutkituissa kirjasarjoissa.

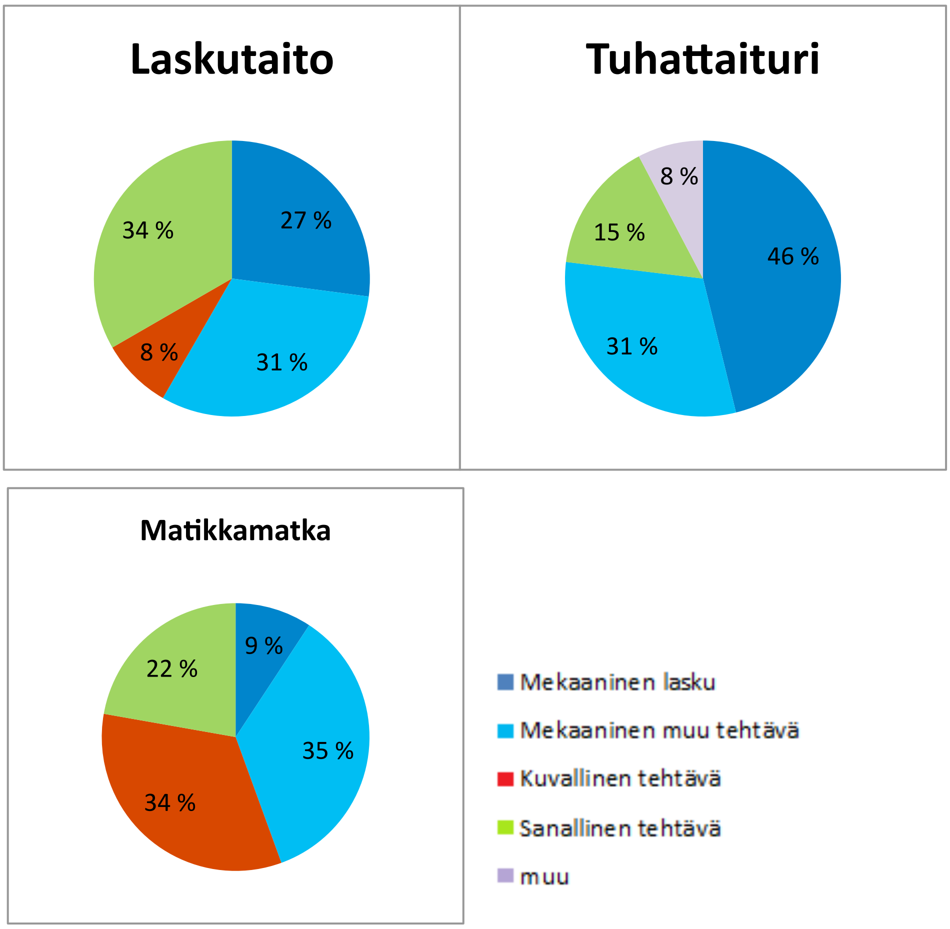
KUVA: 5 Esimerkkikuvio laskutoimitukselle $3 \cdot 1/5$

$3 \cdot 1/5 = 3/5$

8.2. Oppikirjojen valmiskokeiden sisällöt

Selvittääkseni kuinka hyvin oppikirjojen valmiskokeet mittaavat oppilaiden osaamista, analysoin ensin eri oppikirjojen valmiskokeet. Luokittelin tehtävät mekaanisiin laskuihin, mekaanisiin muihin tehtäviin, kuvallisiin tehtäviin, sanallisiin tehtäviin sekä muihin tehtäviin. ”Mekaaninen muu tehtävä” tarkoittaa murtoluvun muuntoa sekaluvuksi, suuruusvertailua sekä laventamista ja supistamista.

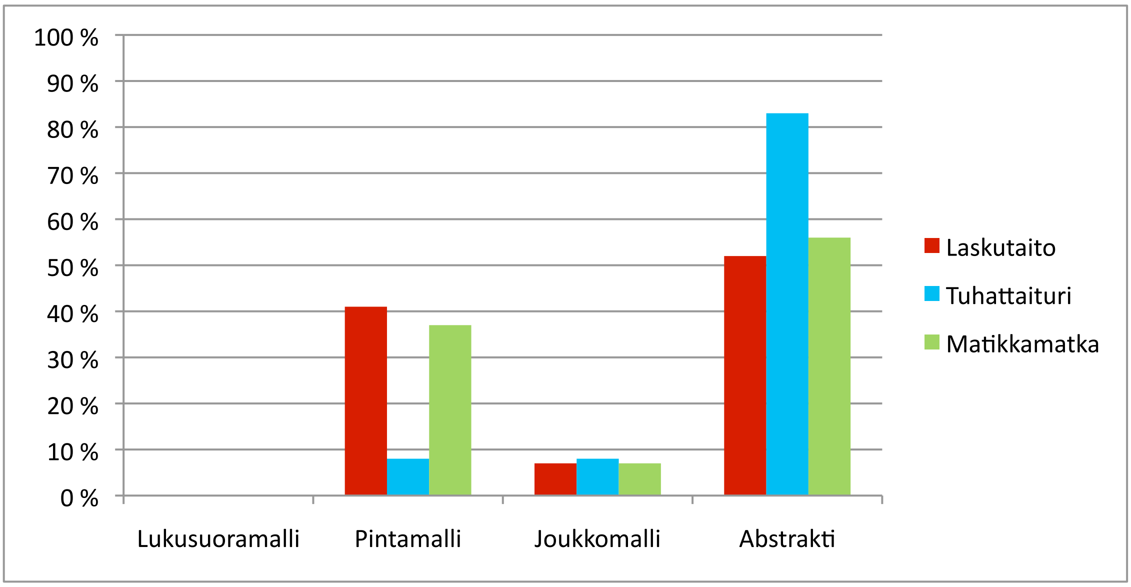
KUVAAJA 6: Oppikirjojen valmiskokeiden tehtävätyypit.



Tuhattaiturin koe sisältää ylivoimaisesti eniten mekaanisia laskuja. Siinä huomionarvoista on, että vaikka uusittu vuoden 2010 painos sisältää opetuksessa aiempaa enemmän toimintamateriaalien käyttöä ja havainnollisuutta, tämä ei kuitenkaan heijastu kokeeseen. Kokeen rakenne on täysin yhtenevä vuoden 2006 painoksen kanssa, vain lukuarvoja on muutettu tehtävien pysyttyä muuten samoina. Laskutaidon koe on kirjan tapaan selkeästi jaoteltu ja kattaa tasaisesti kaikki jakson osa-alueet. Matikkamatkan koe sisältää hyvin vähän laskuja keskittyen eniten kuvallisiin tehtäviin.

Seuraavaksi tutkin eri murtolukumallien käyttötiheyttä eri valmiskokeissa, ja tulokset on esitelty kuvaajassa 7.

KUVAAJA 7: Murtolukumallit eri oppikirjojen valmiskokeissa.



Abstrakti tehtävä tarkoittaa, että kyseistä toimitusta ei ole konkretisoitu millään mallilla.

Lukusuoramallin osaamista ei ole testattu yhdenkään oppikirjan kokeessa. Myös joukkomallin käyttö on tasaisen vähäistä kaikissa oppikirjoissa. Selvästi eniten painottuvat abstraktit laskut, erityisesti Tuhattaiturissa.

8.3. Valmiskokeiden ja itse valmistamieni kokeiden tulosten erot

Tutkiakseni ymmärtämistehtävien ja laskujen painotuksen vaikutusta oppilaiden saavuttamiin tuloksiin laskin muodostamani ymmärryksen ja mekaanisen laskutaidon suhdeluvun (katso luku 7.3.) korrelaatiot eri oppikirjojen kokeisiin. Työhypoteesina on, että kaikista eniten mekaanisia tehtäviä sisältänyt Tuhattaiturin koe korreloisi negatiivisesti suhdeluvun kanssa ja toista ääripäätä edustava Matikkamatka korreloisi positiivisesti. Vertailun vuoksi mukana on suhdeluvun korrelaatiot myös itse valmistamieni kokeiden kanssa. Tulokset ovat seuraavat:

TAULUKKO 5: Ymmärtämisen suhdeluvun korrelaatiot eri kokeiden kanssa.

	Koe 1	Koe 2	Laskutaito	Tuhattaituri	Matikkamatka
Ymmärtämissuhde	-0,041	0,333	0,165	-0,012	0,216
p=	0,306	< 0,001	0,121	0,467	0,055
n=	158	158	52	48	56

Tulokset noudattelevat ennakko-oletuksia, mutta eivät ole koetta 2 lukuunottamatta tilastollisesti merkitseviä. Runsaasti mekaanisia tehtäviä sisältävillä kokeella 1 ja Tuhattaiturilla on työhypoteesin mukaan negatiivinen korrelaatio suhdeluvun kanssa. Näin käykin, mutta korrelaatiot ovat hyvin pieniä. Yhtenä syynä tälle ilmiölle voi olla, että lähes kaikki oppilaat ovat osanneet tehdä osan laskuista, erityisesti yksinkertaisimmat yhteenlaskut. Täten suhdeluvun varustettu mittari ei täysin toimi laskuissa, vaan puree paremmin ymmärrystä mittaaviin tehtäviin.

Jatkossa kokeita 1&2 käytetään vertailupohjana oppilaiden murtolukujen kokonaisosaamiselle. Näiden yhteistulos on laskettu käyttäen painotettua keskiarvoa, sillä kokeiden maksimipistemäärät ovat eriävät. Täten jokainen tehtävä saa yhtä suuren painoarvon. Vertailu itse valmistamiini kokeisiin on tässä mielekästä, mitä voidaan perustella seuraavilla syillä. Ensinnä ne on valmistettu ottaen huomioon erilaiset murtolukumallit ja eri murtolukujen osa-alueet ovat tasaisesti painotetut. Toisekseen niiden valmistamisessa on otettu huomioon sekä laskutehtävät että käsitteen ymmärtämistä mittaavat tehtävät. Kolmanneksi laskien yhteen molemmat valmistamani kokeet, niiden yhteispituus on huomattavasti oppikirjojen valmiskokeita suurempi. Tämä lisää kokeen reliabiliteettia, mikä näkyy esimerkiksi suurempana Cronbachin α:na (katso luku 8.3.).

Seuraavassa taulukossa on omien kokeideni korrelaatiot eri oppikirjojen valmiskokeille:

TAULUKKO 7: Eri kokeiden väliset korrelaatiot

		koe 1 mekaaninen	Koe 2 ymmärrystä mittaava	Laskutaito	Tuhattaituri	Matikkamatka
Kokeiden 1 ja 2 yhteistulos		,941	,980	,863	,843	,860
p=		<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
koe 1 mekaaninen			,855	,788	,761	,784
p=			<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Koe 2 ymmärrystä mittaava				,857	,857	,854
p=				<0,001	<0,001	<0,001

Kaikki korrelaatiot ovat tilastollisesti erittäin merkitseviä ($p<0,001$) mutta onko niissä eroja suhteessa toisiinsa? Suurimman korrelaation ($r=0,863$) sai Laskutaidon koe ja pienimmän ($r=0,843$) Tuhattaiturin koe. Seuraavassa on laskettu näiden korrelaatioiden erojen tilastollinen merkitsevyys Metsämuurosen (2005, 447–448) esittämällä tavalla. Saatu z-pisteiden p-arvo on 0,444, joka ei ole tilastollisesti merkitsevä. Näin ollen voidaan sanoa, että pienistä eroista huolimatta oppikirjojen kokeet korreloivat tilastollisesti yhtä voimakkaasti omien kokeitteni tulosten kanssa. Täten siis kaikkien oppikirjojen valmiskokeet mittasivat oppilaille karkeasti ottaen saman tuloksen kuin itse valmistamani kokeet.

Tarkastelen asiaa myös yksittäisten oppilaiden kannalta. Vaikka oppikirjojen valmiskokeiden ja itse valmistamieni kokeiden välinen korrelaatio yleisellä tasolla onkin hyvä, on tärkeää tutkia myös sitä, tapahtuuko yksittäisten oppilaiden tulosten kohdalla suurta heittelyä. Oppilaan kannalta on huolestuttavaa, mikäli hänen tuloksensa eroaa suuresti omien kokeitteni ja oppikirjan valmiskokeen tulosten välillä.

Kokeiden välisen vaihtelun suoritin laskemalla kokeen 3 tulosta ennustavan regressiosuoran kokeiden 1&2 tuloksen perusteella. Tarkastelun kohteena on tämän regressiosuoran jäännöstermit eli residuaalit. Kun kokeiden 1&2 tulos ennustaa hyvin menestystä valmiskokeessa, on residuaali pieni. Lisäksi residuaalien pitäisi olla normaalisti jakautuneita. (Nummenmaa 2004, 311). Otin tarkasteluun 40 oppilasta, joilla regressiosuoran residuaalit olivat suurimmat eli joiden valmiskokeiden tulokset poikkesivat eniten omien kokeideni tuloksista. Näistä 20 oppilasta olivat saaneet paremman tuloksen valmiskokeessa kuin kokeissa 1&2, ja 20 oppilasta huonomman tuloksen valmiskokeessa kuin kokeessa 1&2. Kiinnostuksen kohteena on tutkia, keskittyvätkö nämä poikkeavia tuloksia saaneet oppilaat jonkin tietyn kirjasarjan valmiskokeen tehneisiin oppilaisiin.

Taulukko kertoo vain siitä tulosten erosta, minkä oppilaat ovat saaneet tehdessään suunnittelemani kokeet sekä oppikirjan valmiskokeen; ei esimerkiksi oppilaiden osaamisen tasosta. Tuloksiltaan poikkeavia tuloksia ovat saaneet niin heikot, keskitasoiset kuin hyvätkin oppilaat. Taulukosta näkyy, että Tuhattaituri on muita oppikirjoja voimakkaammin palkinnut joitakin oppilaita ja rankaissut toisia. Laskutaito sen sijaan on ollut kokeista stabiilein verrattuna omiin kokeisiini.

TAULUKKO 8: Kokeiden 1 ja 2 sekä oppikirjojen valmiskokeiden tulosten erot.

	Oppilaiden määrä, jotka ovat menestyneet **huonosti** oppikirjan valmiskokeessa	Oppilaiden määrä, jotka ovat menestyneet **hyvin** oppikirjan valmiskokeessa
Laskutaito	3	4
Tuhattaituri	9	10
Matikkamatka	8	6

Tuhattaiturin suurta heittelyä voi selittää sen yksipuolisella tehtävävalikoimalla. Kaikki osiot ovat pitkiä, mutta ne keskittyvät vain yhteen asiaan, ja erityisesti laskut sekä muut mekaaniset tehtävät ovat yliedustettuina. Kuvallisia tai muita murtoluvun käsitteen ymmärtämistä mittaavia tehtäviä ei ole lainkaan. Matikkamatkan valmiskokeen tulosten vaihtelun syyt ovat toisaalla. Sen tehtävävalikoimassa oli erittäin vähän laskuja, ja niiden sijalla oli kuvallisia päättelytehtäviä. Useista näistä tehtävistä sai jopa 3 pistettä, ja samantyyppisiä tehtäviä oli useampia. Täten yhden tehtävätyypin vaatiman päättelyn ymmärtäminen tai ymmärtämättömyys vaikuttaa suuresti lopputulokseen.

Lisäksi tarkastelin, kuinka erilaiset laskijatyypit menestyivät eri oppikirjojen kokeissa. Tässä käytin avuksi luvussa 7.3. selitettyä ymmärtämisen ja mekaanisuuden suhdelukua, jonka avulla muodostin nelikentän, johon toiselle akselille tuli oppilaan taitotaso ja toiselle jako mekaaniseen tai ymmärtävään osaamiseen. Ruudussa oleva luku kertoo, kuinka paljon oppilaita mihinkin ryhmään kuuluu.

TAULUKKO 9: Oppilasmäärät mekaanisuuden/ymmärtävyyden ja osaamisen nelikentässä.

	taito	
ymmärtävyys mekaanisuus/	heikko **45** ymmärtävä	hyvä **43** ymmärtävä
	heikko **38** mekaaninen	hyvä **40** mekaaninen

Koska jokaisessa ruudussa on tasaisesti lähes yhtä paljon oppilaita, voidaan päätellä, että suhdelukumittari kertoo juuri osaamisen laadusta, ei sen määrästä.

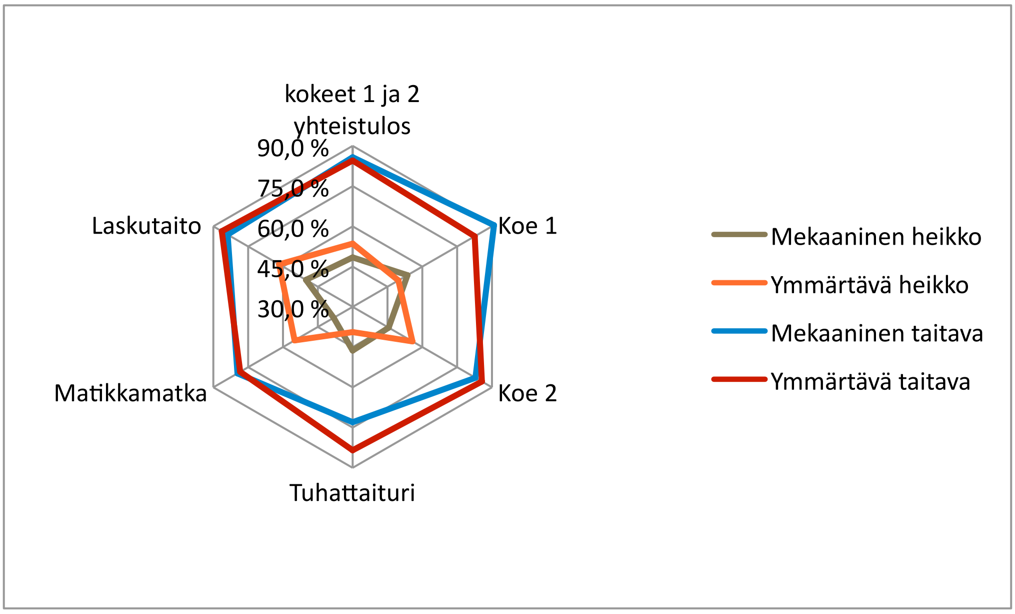
Nelikentän muodostamisen jälkeen kokeilin, kuinka se suhtautuu eri oppikirjojen valmiskokeisiin. Ideaalitapauksessa oppikirjojen profiilit ovat mahdollisimman samanlaisia, jotta mitään osaamistyyppiä ei syrjittäisi minkään kirjan kokeessa. Oppikirjojen kokeissa on kuitenkin suuria eroja, joten kokeita analysoimalla voidaan asettaa työhypoteesit kaikista oppikirjoista:

1) Tuhattaiturin koe suosii mekaanisia laskijoita käsitettä ymmärtävien oppilaiden kustannuksella.

2) Matikkamatkan koe suosii käsitteen ymmärtäjiä mekaanisten laskijoiden kustannuksella.

3) Laskutaidon koe oli tehtäviltään tasapuolisin, joten kaikkien ryhmien pitäisi pärjätä siinä samankaltaisesti kuin kokeen 1 ja 2 yhteistuloksissa.

KUVAAJA 8: Oppijatyyppien menestyminen eri kokeissa.

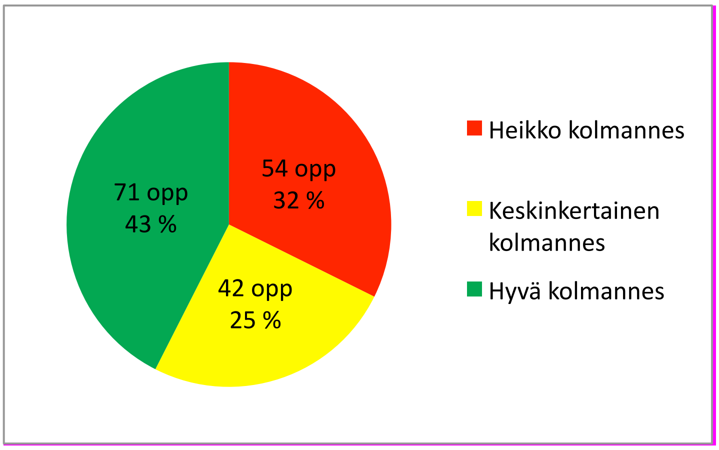


(Tarkat arvot liitteessä 6)

Kuviosta voidaan havainnoida kahdenlaisia tuloksia. Mikäli kuvioon muodostuu neljä samanmuotoista toisiaan leikkaamatonta kuusikulmiota, mittaavat kaikki kokeet oppilaiden osaamista samalla tavalla. Toiseksi mikäli kukin viiva on kuvaajalla yhtä kaukana kärkipisteestä jokaisen kokeen kohdalla, on kyseinen ryhmä saanut samanlaisen tuloksen jokaisesta kokeesta. Tämä toteutuu parhaiten ryhmän ”ymmärtävä taitava” kohdalla. Tämän ryhmän tulokset siis ovat samat riippumatta siitä, millä kokeella niitä mitataan. Sen sijaan mekaaniset taitavat laskijat ovat saaneet kokeessa 1 erittäin korkean tuloksen, mikä onkin luonnollista koska koe 1 mittasi juuri mekaanista laskutaitoa. Kuviossa suurin poikkeama on ryhmällä ”ymmärtävä heikko” kokeessa 1 ja Tuhattaiturin kokeessa. Kokeen 1 kohdalla tämä onkin luonnollista. Ryhmän heikko menestys Tuhattaiturin kokeessa todistaa työhypoteesin 1 puolesta. Tosin taitavia oppilaita katsottaessa tilanne on päinvastainen. Jostain syystä ymmärtävät taitavat laskijat ovat menestyneet taitavia mutta mekaanisia laskijoita paremmin juuri Tuhattaiturin kokeessa. Myös toinen työhypoteesi näkyy parhaiten juuri heikkojen oppilaiden menestyksessä. Heikoille mekaanisille laskijoille juuri vähän laskuja sisältävä Matikkamatkan koe on ollut erittäin vaikea, ja he ovat saaneet siinä huonon tuloksen muihin kokeisiin – erityisesti kokeiden 1 ja 2 yhteistulokseen – verrattuna. Kolmannen oletuksen mukaisesti Laskutaidon kokeet tulokset vastaavat parhaiten kokeiden 1 ja 2 yhteistulosta. Tämä oletus toteutuu pitkälti. Ainoa pienenä poikkeuksena on, että ymmärtävät heikot laskijat ovat menestyneet siinä hieman paremmin, mutta mikään ryhmä ei ole kokenut tätä koetta liiallisen vaikeaksi.

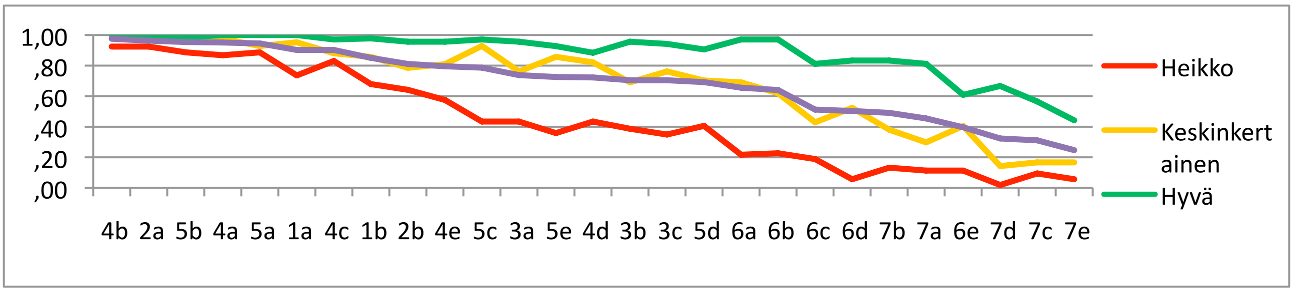
Tutkin myös koetehtävien erottelevuutta ja vaikeutta. Jaoin oppilaat osaamisen mukaan kolmeen ryhmään. Tämä jaottelu perustui kokeen 1 ja 2 kriteereihin hyvästä osaamista. Nämä kriteerit olin määritellyt Helsingin matematiikkalukion linjajohtajan Ville Tilviksen ja matematiikan erityiskouluttaja Hannele Ikäheimon avustuksella. Seuraava diagrammi kuvaa, miten oppilaat sijoittuivat osaamisen kriteerien mukaisiin ryhmiin:

KUVAAJA 2: Oppilaiden sijoittuminen eri osaamisryhmiin.

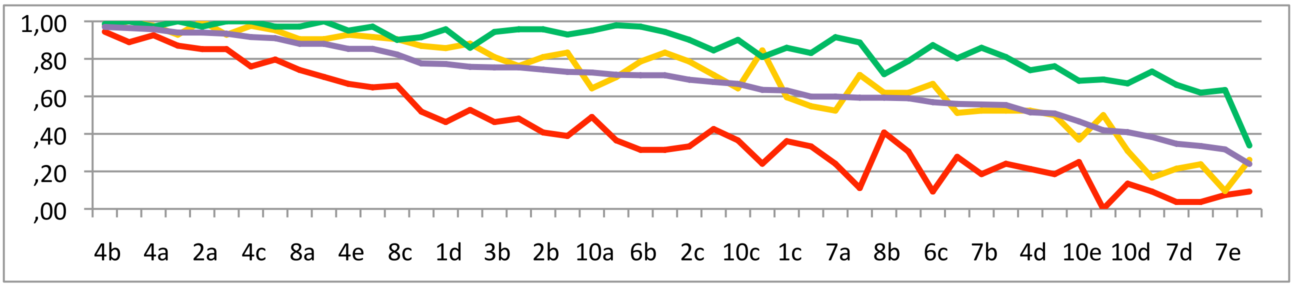


Tämän jaottelun avulla tarkastelin oman kokeeni tehtävien vaikeustasoa ja erottelevuutta. Hyvän kokeen tulisi olla sekä erotteleva kaikilla taitotasoilla että vaikeustasoltaan sopiva. Tarkastellessa yksiulotteista muuttujaa tulisi myös yksittäisten tehtävien osaamisen korreloida kaikkien osioiden osaamisen kanssa (Metsämuuronen 2005, 136-144). Seuraava taulukko kuvaa edellä kuvattujen kolmen ryhmän (heikko, kohtuullinen, hyvä) osaamista suhteessa kokonaisosaamiseen. Mikäli kaikki käyrät käyttäytyvät samankaltaisesti eikä yksittäisissä tehtävissä ole suurta heittelyä ryhmien välillä, korreloivat tehtävät toivotulla tavalla yhteispistemäärän kanssa. Tehtävien vaikeustaso voidaan luonnollisesti lukea kokonaisratkaisuprosentista. Koetta tehdessä tarkoituksena on ollut, että mukana on sekä vaikeita että helppoja tehtäviä, jotta sekä hyvien että heikkojen oppilaiden ryhmien sisäiset vaihtelut tulisi eroteltua (vertaa Metsämuuronen 2005, 143). Tehtävät on järjestetty kokonaispistemäärän (violetti viiva) mukaiseen laskevaan järjestykseen.

KUVAAJA 2: **Kokeen 1** (mekaaninen koe) tehtäväkohtainen osaaminen.

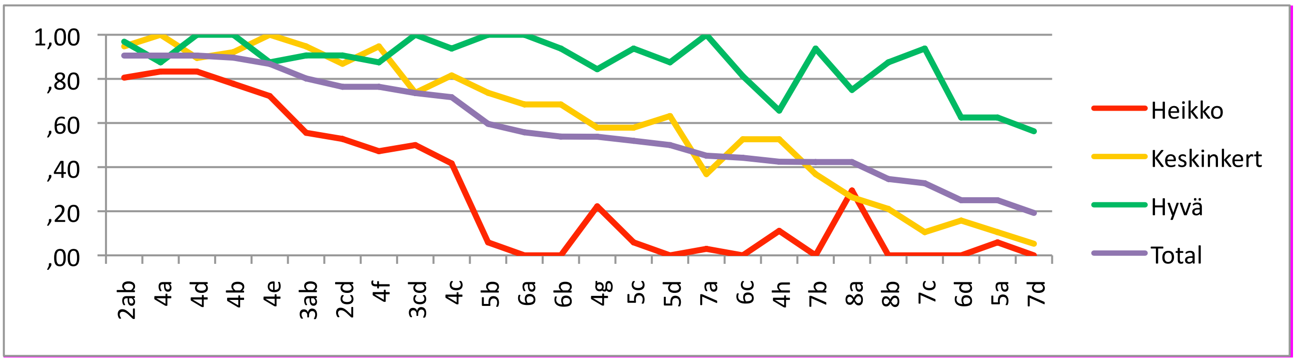


KUVAAJA 3: **Kokeen 2** (ymmärrystä mittaava koe) tehtäväkohtainen osaaminen.

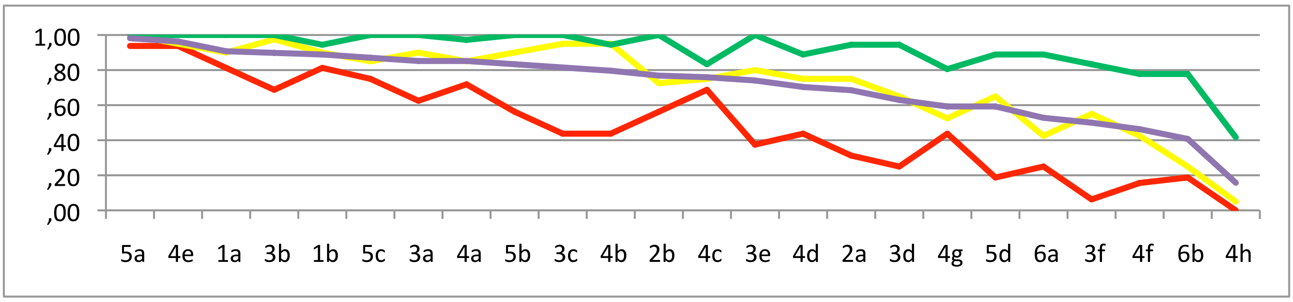


Kuvaajat noudattavat pääosin toivottuja oletuksia. Vertailun vuoksi vastaavat kuviot Oppikirjojen kokeista:

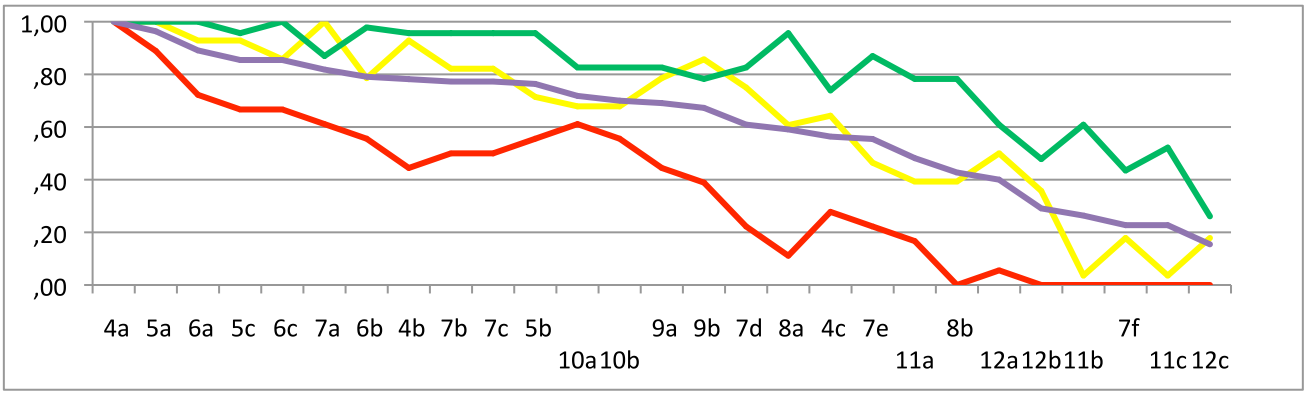
KUVAAJA 4. Tuhattaiturin kokeen tehtäväkohtainen osaaminen.



KUVAAJA 5: Laskutaidon kokeen tehtäväkohtainen osaaminen.



KUVAAJA 6: Matikkamatkan kokeen tehtäväkohtainen osaaminen.



Oppikirjojen kokeista on ensinnä muistettava, että niistä jokaisen teki vain noin kolmasosa oppilaista eli pienemmän otosmäärän takia aineisto on alttiimpi satunnaisvaihtelulle. Laskutaidon koe on oppikirjoista tasapainoisin. Matikkamatkan ja Tuhattaiturin molempien ongelmana on, että heikot oppilaat menestyvät liian huonosti vaikeimmissa tehtävissä eli eivät pääse näyttämään osaamistaan millään lailla. Tehtävät näissä kokeissa olivat tosin täysin erilaisia: Laskutaidossa kuvallisia ja sanallisia päättelytehtäviä ja Tuhattaiturissa mekaanisia pitkähköja laskulausekkeiden sievennyksiä, mutta yhtälailla liian vaikeita heikoille oppilaille. Erityisesti Tuhattaiturin kokeessa tämä on suuri ongelma, sillä alle puolet tehtävistä on sellaisia, johon heikot oppilaat ovat osanneet vastata edes 20:n prosentin onnistumistodennäköisyydellä. Heikkoon kolmannekseen kuului 32% oppilaista, ja näille siis Tuhattaiturin kokeen tehtävistä alle puolet on sellaista, johon heillä on edes jonkinlaiset mahdollisuudet vastata. Näin ollen tulokset heidän osaltaan ovat varsin sattumanvaraisia, sillä heidän osaamista mittaavia tehtäviä on niin vähän, että sattuman merkitys koenumeroon kasvaa erittäin suureksi. Matikkamatkassa heikkojen laskijoiden osaamista mittaavia tehtäviä on enemmän, mutta osioiden 7 ja 8 kahdeksan osalta ero on vielä dramaattisempi; heikot osaajat olisivat voineet jättää suoralta kädeltä tekemättä, sillä heidän ratkaisuprosentti on lähes kaikissa tehtävissä pyöreä nolla.

Törnroos (2004, 57–58) korostaa yhtenevyyden vaatimusta annetun opetuksen ja kokeen sisältöjen välillä arvioinnin oikeudenmukaisuuden toteutumiseksi. Minimitavoitteena on, että kokeessa ei kysytä asioita, joita ei ole opetettu. Tämän kriteerin kaikki oppikirjat läpäisivät. Sekä tehtävien sisällön että käytettyjen mallien suhteen kokeet vastasivat kyseisen oppikirjan sisältöä.

8.4. Tulosten luotettavuus

Jotta päästiin tutkimaan viidennen luokan oppimäärän mukaista osaamista syksyllä 2010 kokeet oli suoritettava, ennen kuin oppilaat käsittelevät murtolukuja kuudennella luokalla. Täten aineiston keruun kanssa tuli hieman kiire. Kokeen ennakkotestaukseen oli riittävästi aikaa, mutta teoriapohjaan perehtyminen oli vielä kesken. Tämän johdosta tietämykseni aiheesta lisääntyi aineiston keruun, tulosten analysoinnin ja teoriapohjan viimeistelyn aikana niin paljon, että en voi olla täysin tyytyväinen valmistamiini kokeisiin. Idea kahden eri kokeen – ymmärtämistä ja mekaanista laskutaitoa mittaavan – välillä on hyvä, mutta ero niiden välillä olisi voinut olla vielä suurempi. Ymmärtämiskokeenkin tehtävät sijoittuvat Wilsonin taksonomian toiseksi alemmalle tasolle, ja ylimpiä tasoja – soveltamista ja analysointia – ei testata lainkaan. Kuten luvussa 7.1. on esitetty, se on toisaalta perusteltua, mutta mielenkiintoista olisi ollut nähdä, olisivatko tällaiset tehtävät tuottaneet erilaisia tuloksia.

Mittarin validiteetillä tarkoitetaan sitä, kuinka hyvin mittari kuvaa sitä, mitä sillä ajatellaan mitattava. Tässä tutkimuksessa tärkeää on ollut jako mekaanisiin laskuihin ja murtolukujen käsitteen ymmärrystä mittaaviin tehtäviin. Tämä jaottelu ei ole aivan yksinkertainen. Tutkimuksen validiteettia parantaakseni kävin valmistamieni kokeiden tehtävät läpi yhdessä matematiikan opetuksen kouluttaja Hannele Ikäheimon kanssa erityisesti siltä kannalta, miten niillä voidaan mitata murtoluvun käsitteen ymmärtämistä.

Koe oli oppilaille kohtuullisen raskas. Sen teettäminen luokassa vei kokonaisuudessaan kaksi oppituntia, vaikka nopeimmat oppilaat tekivätkin sen lähes yhden oppitunnin aikana. Koska oppilaat tekivät useamman erillisen kokeen, on vaarana, että yhden kokeen tekeminen auttaa muistamaan tietoja, joita voi käyttää hyödykseen toisessa kokeessa. Tämän vaikutuksen kontrolloimiseksi teetätin kokeet 1&2 eri järjestyksessä eri luokissa. Lopuksi suoritin kahden riippumattoman otoksen t-testin seuraavilla hypoteeseillä:

H_0: $\mu_1=\mu_2$

H_1: $\mu_1\neq\mu_2$

jossa μ_1 on kokeen 1 ensin tehneiden ryhmän tuloksen odotusarvo ja μ_2 kokeen 2 ensin tehneiden ryhmän tuloksen odotusarvo. T-testin p-arvot ovat kokeen 1 kohdalta p=0,810 ja kokeen kaksi kohdalta p=0,783, joten nollahypoteesi jää voimaan ja voidaan todeta, että kokeiden tekojärjestyksellä ei ollut merkitystä tulosten kannalta.

Koko käsiteltävä aihe, murtoluvut viidennellä luokalla, on myös varsin laaja. Tästä oli seurauksena, että yhteenkään osa-alueeseen tai murtolukumalliin ei pystytty keskittymään tarkasti. Tarkempi rajaus olisi mahdollistanut suuremman määrän tehtäviä yhdestä osa-alueesta, ja siten oikein tutkittuna tarkempaa tietoa. Tutkimuksen tekemisen aikana minulla heräsi mielenkiinto erityisesti lukusuoramallin käyttöön murtolukujen yhteydessä. Tosin tässä ongelmana on se, että lukusuoraa ei erityisesti mainita opetussuunnitelman perusteissa murtolukujen yhteydessä, vaikkakin sen merkitystä korostetaan etenkin angloamerikkalaisessa alan kirjallisuudessa. Tutkimuksen olisi voinut suorittaa myös lukusuoramallin käyttöä tutkimalla, mutta se olisi muuttanut koeasetelmaa merkittävästi. Oppikirjojen – ja niiden valmiskokeiden – sijasta nyt olisi tutkittu opetussuunnitelman kattavuutta.

Eri kokeiden sisäisen reliabiliteetin tarkastamiseksi laskin kaikista kokeista Cronbachin α:n. Kaikkien kokeiden α:t ovat kaikki erittäin korkeita, koska kaikissa kokeissa on melko paljon laskutehtäviä (osioita) ja korrelaatiot eri osioiden välillä ovat korkeat.

TAULUKKO 6: Tutkimuksessa käytettyjen kokeiden Cronbachin α:t.

	Cronbachin α	Osioiden määrä
Koe 1	0,912	27
Koe 2	0,937	48
Kokeet 1 ja 2 yhtessä	0,952	75
Laskutaito	0,85	24
Tuhattaituri	0,927	30
Matikkamatka	0,905	27

Empiirinen aineisto kerättiin kolmessa helsinkiläisessä sattumanvaraisesti valitussa koulussa yhteensä seitsemästä eri luokasta. Koulut eivät ole matematiikan opetukseltaan mitenkään tavallisuudesta poikkeavia. Koska suomalaiset koulut ovat oppimistuloksiltaan varsin tasaisia, voi tulosten tältä osin olettaa yleistettävissä koko maahan. Tutkimuksen aineisto on kuitenkin niin pieni ja vähäisestä määrästä kouluja kerätty, että pitkälle meneviä yleistyksiä ei kannata tehdä. Otantamenetelmiin ei ole kiinnitetty niin paljon huomiota kuin tarve vaatisi, mutta koska opinnäytetyössä resurssit ovat rajalliset, ei laajempaan otantaan olisi ollut mahdollisuutta.

Tutkimuksessa käytetty mekaanisuuden ja käsitteen ymmärtämisen suhdeluku osoittautui hyödylliseksi työkaluksi analyyseja tehdessä. Sen luotettavuus voidaan kuitenkin asettaa kyseenalaiseksi. Ensinnä sitä ei ole testattu laajemmalla oppilasjoukolla eikä muissa yhteyksissä. Toisekseen voidaan olla eri mieltä, mitkä tehtävät mittaavat käsitteen ymmärtämistä ja mitkä mekaanista laskutaitoa. Tämän tutkimuksen kohdalla tehtävät olivat kuitenkin alusta asti laadittu tämä asia mielessä pitäen, mikä vähentänee tulkinnallista epäselvyyttä.

9. Pohdinta

Tämänkaltainen tutkimus tärkeää, sillä matematiikassa pitää *ymmärtää* käsitteitä. (Vertaa luku 3.1). Barnby & al. kritisoivat matematiikan testausta siitä, että vaikka usein sanotaan testattavan oppilaiden ymmärrystä, keskitytään vain siihen, saavatko he tehtävät oikein ja unohdetaan taustalla olevan mutkikkaamman ajattelun olemassaolo. He jatkavat, että tehtävät voidaan usein suorittaa oikein myös puutteellisella ymmärryksellä. (Barnby et al. 2007, 44-45). Hihnala toteaa väitöstutkimuksessansa: ”murtolukujen laskutoimituksissa oppilaat saattavat turvautua laskusääntöihin, vaikka heillä olisi edellytyksiä päätellä ratkaisu aiempien tietojen pohjalta” (Hihnala 2005, 41). Vaikka en tehnyt varsinaista analyysia oppilaiden virhetyypeistä, kokeet korjanneena voin vahvistaa saman. Oppilaat turvautuivat suurimmaksi osaksi ulkoa opittuihin vääriin tai oikeisiin kaavoihin, eivätkä useimmiten yrittäneet käyttää tehtävissä olleita kuvia apuna. Kuvat olivat kohdallaan yleensä vain niillä oppilailla, jotka muutenkin osasivat asian. Usein näytti siltä, että ne oli piirretty tehtävän suorittamisen jälkeen sen sijaan, että niitä oltaisi yritetty käyttää ajattelun apuna.

Tulosten perusteella havaittiin, että käsitteen ymmärtäminen auttoi laskutehtävissäkin oikean ratkaisun saamisessa lukuun ottamatta kerto- ja jakolaskua. Tulkintani on, että murtolukujen kerto- ja jakolasku ovat käsitteellisesti niin vaikeita, että suurimmalle osalle oppilaista pelkkä käsitteenymmärrys ei niissä ole riittänyt, vaan lisäksi on tarvittu luotettavaa laskualgoritmin hallintaa. Voidaan nähdä kaksi reittiä jako- ja kertolaskun vaikeuksien voittamiseen. Ensinnä voidaan todeta, että asia on liian vaikea pelkän ymmärtämisen ja päättelyn varassa tapahtuvaksi, ja pitäytyä opetuksessa laskualgoritmin mekaanisen harjoittelun lisäämiseen. Toinen vaihtoehto on yrittää parantaa käsitteen ymmärryksen opettamista. Tähän käytettävää aikaa voidaan tarvittaessa lisätä, ja erityisesti hyödyntää asianmukaisesti ymmärtämistä auttavia havainto- ja toimintamateriaaleja. Parantuneen käsitteen ymmärryksen kautta myös kerto- ja jakolaskun algoritmien toimintamekanismien ymmärtäminen tuottaa parempia tuloksia laskuissa. Itse olen jälkimmäisen vaihtoehdon kannalla.

Alakoulussa suurin osa opettajista käyttää matematiikan kokeina opettajanoppaiden valmiskokeita. Tätä tutkimusta edeltävänä tietoa olisi ollut mielenkiintoista selvittää tarkasti kuinka paljon niitä käytetään, ja myös mikä on tilanne aineenopettajien alueen – yläkoulun ja lukion – puolella. Olennaista on tietenkin se, mittaavatko valmiskokeet tarpeeksi luotettavasti osaamista, vai pitäisikö opettajan valmistaa itse kokeensa ottaen huomioon juuri sen, kuinka hän on murtolukujakson opettanut. Tämän tutkimuksen perusteella voidaan karkeasti sanoa, että hyvien oppilaiden kohdalla ei ole suurta merkitystä millaisella kokeella osaamista mitattiin, heidän tuloksensa pysyivät pääosin samalla tasolla kokeen luonteesta riippumatta. Suurempana ongelmana ovat heikot ja keskitasoiset oppilaat. Heidän tuloksensa vaihtelivat suuresti käytetystä kokeesta riippuen. Mukana oli myös systemaattista vaihtelua, jossa tietty koe antoi tietynlaiselle oppijaryhmälle muihin kokeisiin verrattuna jatkuvasti heikompia tai parempia tuloksia. Näin ollen **tasapuolisen arvioinnin toteutumiseksi opettajan tulisi kiinnittää huomiota erityisesti heikompien oppilaiden taitojen arviointiin.**

Yhtenä tutkimuksen päämääränä on ollut kehittää murtolukukoe, joka mittaa luotettavasti oppilaiden osaamista. Empiirisen aineiston perusteella voidaan sanoa, että kaikkien tutkimuksessa olleiden kokeiden – kahden itse valmistamani ja kolmen eri oppikirjan valmiskokeen – tulokset korreloivat voimakkaasti keskenään. Erityisesti hyvät oppilaat erottautuivat riippumatta siitä, mitä koetta käytettiin. Heikkoja oppilaita ei useinkaan auttanut edes tehtävätyypiltään itselleen sopivan kokeen tekeminen. Tämä tulos antaa kuitenkin vain karkean arvion kokeiden toimivuudesta. Monien oppilaiden kohdalla väärin laadittu koe antaa vääristyneen kuvan osaamisesta, joko liian hyvän tai heikon. Minimivaatimuksena on, että koe täyttää kaksi vaatimusta: se vastaa annettua opetusta ja kattaa tasapuolisesti koko opetetun aiheen. Osa tutkituista oppikirjojen kokeista ei täyttänyt toista vaatimusta, vaan ne olivat liian yksipuoleisia. Se kuinka koe vastaa opetusta, riippuu tietenkin tunneilla käydyistä asioista. Mikäli opettaa pitäytyy tarkasti oppikirjassa, ja oppikirjan valmiskokeessa testataan tarkasti oppikirjan sisältöä, tämä vaatimus toteutuu. Tällöin kuitenkin opettaja jää oppikirjan orjaksi, eikä pysty sopeuttamaan opetustaan luokan tarpeisiin. Täten ainoaksi hyväksyttäväksi ratkaisuksi jää, että opettaja tarvittaessa valmistaa itse kokeensa. Valmiskokeita voi toki käyttää ainakin niiltä osin kun ne sopivat annettuun opetukseen, mutta opettajan täytyisi vähintään katsoa mitä koe sisältää, arvioida mitkä osiot kokeesta voivat soveltua käytettäväksi, ja täydentää koetta tarvittaessa itse valmistamillaan tehtävillä.

Yhtenä tutkimuksen kantavana teemana on ollut matemaattisen käsitteen ymmärtäminen ja se, kuinka toimintamateriaalien käyttö auttaa ymmärtämisprosessissa. Tähän kysymykseen tutkimuksen empiirinen osuus antoi valitettavan vähän vastauksia. Suurimpana syynä on koeasetelma. Tässä tutkimuksessa keskityttiin murtolukukokeisiin, kun taas toimintamateriaalien vaikutusta opetukseen on helpointa tutkia klassisella opetuksellisella interventiolla, jossa tutkimusryhmä käyttää runsaasti materiaaleja ja verrokkiryhmä opiskelee ilman niitä. Tässä tutkimuksessa yhtä luokkaa on opettanut yksi opettaja, joten muut tekijät – esimerkiksi opettajan toiminta ja valittu oppikirja – ovat olleet todennäköisesti merkittävämpiä tekijöitä kuin toimintamateriaalien käyttö. Jotta nämä tekijät olisi saatu vakioitua, olisi otoksen täytynyt sisältää oppilaita niin monesta eri luokasta, että sellaisen aineiston kerääminen opinnäytetyönä on käytännössä mahdotonta.

Monien tutkimustulosten ja kasvatustieteilijöiden näkemysten mukaan käsitteen ymmärtäminen lisää pitkäkestoisen muistin toimintaa. Vastaavasti pinnalliset ja ulkoa opetellut ratkaisumallit tuppaavat helposti unohtumaan tai menemään sekaisin. Tämän tutkimuksen asetelma eroaa normaalista koulukokeesta siinä, että opetuksen ja testin välillä oli kulunut noin puoli vuotta – jopa ylikin – asian opettamisesta.

Olisi ollut erittäin mielenkiintoista kokeilla käsitteen ymmärtämisen ja pitkäaikaisen muistin toiminnan yhteyttä pitkittäistutkimuksella käyttäen tutkimusta varten luotua käsitteen ymmärtämisen ja mekaanisen laskutaidon välistä suhdelukua. Oppilaat olisi testattu sekä välittömästi murtolukujakson jälkeen että uudelleen riittävän pitkän ajan kuluttua. Oletuksena on, että käsitteen ymmärtämisessä korkean suhdeluvun saaneet oppilaat säilyttävät tasonsa paremmin. Valitettavasti tällaisen pitkittäistutkimuksen tekeminen on opinnäytetyössä hankalaa opiskelijan valmistumisaikataulun kannalta. Näin ollen muistin – ja erityisesti pitkäaikaismuistin – tutkimisen merkitys sai valitettavan pienen osuuden tässä tutkielmassa käytännön syiden takia. Käsitteen ymmärtämisen ja pitkäaikaisen muistin tehostumisen yhteys on kuitenkin mielenkiintoinen aihe jatkotutkimukselle, ja tätä yhteyttä voi soveltaa myös muihin matematiikan osa-alueisiin kuin murtolukuihin.

Ennen suhdeluvun hyödyntämistä pitäisi kuitenkin ratkaista sen luotettavuusongelmat, joihin viitattiin luvussa 8.3. Tutkittavana on esimerkiksi seuraavia asioita:

-Onko suhdeluku reliaabeli eli saako yksi oppilas saman suhdeluvun, mikäli koetilanne toistetaan useamman kerran?

-Voiko suhdeluvun yleistää koskemaan muita matematiikan osa-alueita, esimerkiksi geometriaa, algebraa, aritmetiikkaa tai paikkajärjestelmän perusteiden ymmärtämistä?

-Riittääkö yksiuloitteinen ”mekaaninen – ymmärtävä” –akseli luokitteluksi, vai pitäisikö rakentaa useampiulotteinen malli huomioiden esimerkiksi sanalliset, kuvalliset ja abstraktit tehtävät omina ulottuvuuksinaan.

Hyvä tutkimus tuottaa usein enemmän uusia kysymyksiä kuin antaa vastauksia. Näin kävi myös tätä tutkielmaa tehdessä. Nostan esiin muutaman aiheen. Luvussa 5.1. esiteltiin Wilsonin taksonomia, ja luvussa 7.1. todettiin tämän tutkimuksen keskittyvän vain sen alatasoihin. Mielenkiintoista olisi lähteä kehittämään koetyyppiä, joka testaisi myös Wilsonin taksonomian ylempiä tasoja eli soveltamista ja analysointia. Toiseksi luotettavuustarkastelun yhteydessä luvussa 8.3. pohdittiin tutkimuksessa käytetyn suhdeluvun ongelmista. Näihin ongelmiin voisi pureutua tarkemmin päämäärä luoda luotettava mittari ymmärtämisen ja mekaanisuuden suhteen mittaamiseksi. Kolmanteen aiheeseen antoi syyn lukusuoramallin heikko hallinta. Kokeissa olleet lukusuoratehtävät olivat mielestäni erittäin helppoja, pelkän yksittäisen lukuarvon lukemista tai tuottamista ilman minkäänlaisia laskutoimituksia, mutta siitä huolimatta ne oli osattu murtolukumalleista heikoiten. Herää kysymys, kuinka paljon tähän huonoon osaamiseen vaikuttaa se, että lukusuoramallia ei Suomessa painoteta murtolukujen yhteydessä. Neljäntenä ajatuksena heräsivät kaikki mahdolliset tutkimukset, jotka pidempiaikainen pitkittäistutkimus mahdollistaisi. Erityisen kiinnostavaa olisi ottaa selvää, kuinka toteutuu kirjallisuudessa usein esiintynyt hypoteesi matemaattisten käsitteiden ymmärtämisen muistia auttavasta vaikutuksesta.

Lähteet

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: Edita.

Baker, D., Knipe, H., Collins, J., Leon, J., Cummings, E., Blair, C. & Gamson, D. 2010. One Hundred Years of Elementary School Mathematic in the United States: A Content Analysis and Cognitive Assessment of Textbooks From 1900 to 2000. Journal for Research in Mathematics Education vol. 41 (4) July, 383-423.

Ball, D.L. 1990. Halves, Pieces, and Twoths: Constructing Representational Contexts in Teaching Fractions. http://ncrtl.msu.edu/http/craftp/html/pdf/cp902.pdf. Tarkistettu 6.2.2011.

Barnby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate, J. 2007. How Can We Assess Mathematical Understanding? In Woo J.H., Lew, H.C., Park, K.S. & Seo, D.Y. (Eds) Proceedings if the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education. Seoul:PME.

Barrow, J. 1999. Lukujen taivas. Helsinki: Art House Oy.

Beattie, I.D. 1986. Modeling operations and Algorithms. The Arithmetic Teacher vol. 33 (6) February, 23-38.

Bell, A.W., Costello, J. & Küchemann,C. 1983. A Review of Research in Mathematical Education: Part A – Research on Learning And Teaching. Windsor: NFER-Nelson Publishing Company Ltd.

Behr, M. & Post, T. 1992. Teaching Ratinoal Number and Decimal Concepts. In Post, T. (ed.) Teaching Mathematics in Grades K-8: Research-based methods. Boston: Allyn & Bacon, 201-248.

Björkqvist, O. Social Constructivism and Assessment. In Ahtee, M & Pehkonen, E. (eds.) Constructive Viewpoints for School Teaching and Learning in Mathematics and Science. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 131, 19-25.

Bloom, B.S., Hastings, J.T. & Madaus, G.F. 1971. Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning. New York: McGraw-Hill Inc.

Boggan, M., Harper, S. & Whitmire, A. 2010. Using Manipulatives to Teach Elementary Mathematics. Journal of Instructional Pedagogies vol. 3 June, 1-6.

Boyer, C. 1985. A History of Mathematics. New Jersey: Princeton University Press.

Bray, W. S. & Abreu-Sanches, L. 2010. Using Number Sense to Compare Fractions. Teaching Children Mathematics. vol. 17 (2) September, 90-98.

Brown, M. 2004. What Research Evidence Tells Us About Effective Mathematics Teaching for Children Aged 6-13. In Fujita, H., Hashimoto, Y., Hodgson, B.R., Peng, Y.L. Lerman, S. & Sawada, T. (Eds.) Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education.USA: Kluwer Academic Publishers.

Brown, M., Askew, M., Rhodes, V., Wiliam, D. & Johnson, D. 1997. Effective Teachers of Numeracy in UK Primary Schools: Teachers Content Knowledge and Pupils´ Learning. In Pehkonen, E. (ed.) Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education vol 2. Helsinki: Gummerus, 121-128.

Clements, D.H. & Sarama, J. 2008. Mathematics and Technology – Supporting Learning for Students and Teadhers. In Saracho, N. & Spodek, B. (Eds.) Contemporary Perspectives on Science and Technology in Early Childhood Education. Charlotte: Information Age Publishing,127-147.

Copeland, R.W. 1974. How Children Learn Mathematics. Teaching Implications of Piaget´s Reseach. New York: MacMillan Publishing Co, Inc.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002) Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifthgrade Students: A comparison of the Effects of Using Commercial Curriculum With the
Effects of Using Rational Number Project Curriculum. Journal for Research in Mathematics
Education vol. 33 (2), 111-144.

Driscoll, M. 1984. What Research Says. The Arithmetic Teacher 31 (6), 34-39.

Ellington, A. J. & Whitenack, J.W. 2010. Fractions and the Funky Cookie. Teaching Children Mathematics 16 (9) May, 532-539.

English, L.D. & Halford, G.S. 1995. Mathematics Education: Models and Processes. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Ernest, P. 2006. Reflections on Theories of Learning. ZDM - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Vol. 38 (1), 4-7. http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm061a2.pdf. Tarkistettu 14.2. 2011.

Fitzpatrick, R. (ed.) 2008. Euclid´s Elements of Geometry. The Greek Text of J.L. Heiberg (1883-1885). From Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883-1885. USA: Richard Fitzpatrick GNU General Public License

Flegg, G. 2002. Lukujen historia - Sormilla laskemisesta tietokoneisiin. Helsinki: Art House.

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K. Herpen, E. & Keijzer, R. 2008. Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. Rotterdam: Sense Publishers.

Haapasalo, L. 1992: Murtolukukäsitteen konstruktivistinen oppiminen. Jyväskylä:Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 51.

Haapasalo, L. 1993a. Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehittämisnäkymiä. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 2.

Haapasalo, L. 1993b. Desimaalilukujen ja yksikkömuunnosten konstruktivistinen oppiminen. Jyväskylä: Yliopistopaino. Kasvatustieteiden tutkimuslatoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 55.

Haapasalo, L. 2004. Interplay Between Conceptual and Procedural Knowledge by Making Formal and Informal Mathematics. In Laine, A., Lavonen, J. & Meisalo, J. (Eds.) Current Research on Mathematics and Science Education: Proceedigs of the XXI Annual Symposium of the Finnish Association of Mathematics and Science Education Research. Helsinki: Helsingin Yliopisto. Department of Applied Sciences of Education. Research report 253, 123-140.

Hannula, M. S., Maijala. H. & Pehkonen, E. 2004. On Development of Pupils´ Self-confidence and Understanding in Middle Grade Mathematics. In Laine, A., Lavonen, J. & Meisalo, J. (Eds.) Current Research on Mathematics and Science Education: Proceedigs of the XXI Annual Symposium of the Finnish Association of Mathematics and Science Education Research. Helsinki: Helsingin Yliopisto. Department of Applied Sciences of Education. Research Report 253, 141-158.

Harlen, W. 2006. On the Relationship Between Assessment for Formative and Summative Purposes. In Gardner, J. (Ed.) Assessment and Learning. London: SAGE Publications Ltd.

Haylock, D. 2006. Mathematics Explained for Primary Teachers. London: SAGE Publications Ltd.

Hassinen, S. 2006. Idealähtöistä koulualgebraa: IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla. Helsinki: Helsingin yliopiston soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 274.

Heinonen, J-P. 2005. Opetussuunitelmat vai oppimateriaalit: Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 257.

Hihnala, K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen: peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylä University. Studies in Education, Psychology and Social Research 278.

Hirstein, J. 2007. The Impact of Zoltan Dienes on Mathematics Teaching in the United States. The Montana Mathematics Enthusiast (2), 169-172.

Huhtala, S. & Laine, A. 2004. "Matikka ei ole mun juttu" – Matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 320-346.

Ikäheimo, H. & Risku, A-M. 2004. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (Toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä:

Niilo Mäki Instituutti, 222-240.

Ikäheimo, H. & Voutilainen, E. 2009. Murtolukuja välineillä luokille 3-9. Helsinki: WSOYpro Oy.

Joutsenlahti, J & Vainionpää, J. 2007. Minkälaiseen matemaattiseen osaamiseen peruskouluissa käytetty oppimateriaali ohjaa? Teoksessa Merenluoto, K., Virta, A. & Carpelan, P. (Toim.) Opettajakoulutuksen muuttuvat rakenteet. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:77, 184-191.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2008. Oppikirja vai harjoituskirja? Perusopetuksen luokkien 1-6 matematiikan oppimateriaalien tarkastelua MOT-projektissa. Teoksessa Kallioniemi, A. (Toim.) Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka. Ainedidaktinen symposiumi 8.2.2008 Helsingissä. Osa 2. Helsingin yliopisto. Käyttäytymistieteellinen tiedekunta. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 299, 547-558.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2010. Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa Niemi, E.K. & Metsämuuronen, J. (Toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Helsinki: Opetushallitus. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2.

Kaasila, R. 2000. ”Eläydyin oppilaiden asemaan": luokanopettajiksi opiskelevien kouluaikaisten muistikuvien merkitys matematiikkaa koskevien käsitysten ja opetuskäytäntöjen muotoutumisessa. Rovaniemi: Lapin yliopisto. Acta Universitatis Lapponiensis. Tutkimuksia 32.

Kalakoski, V. 2007. Muistikirja. Helsinki: Edita Publishing Oy.

Kairavuo, K. & Voutilainen, E. 2005. Matematiikkaa värisauvoilla luokille 6-9. Helsinki: WSOY.

Keranto, T. On the Mathematical and Pedagogical Content Knowledge of Prospective Teachers: the Case of the Division of Fractions and Proportional Reasoning. In Laine, A., Lavonen, J. & Meisalo, J. (Eds.) Current Research on Mathematics and Science Education: Proceedigs of the XXI Annual Symposium of the Finnish Association of Mathematics and Science Education Research. Helsinki: Helsingin Yliopisto. Department of Applied Sciences of Education. Research Report 253, 178-200.

Kieren, T.E. 1983. Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. In Zweng, M., Green, T., Kilpatrick, J., Pollak, H. & Suydam, M. (Eds.) Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. Boston: Birkhäuser Inc, 506-508.

Kennedy, L.M. 1986. A Rationale. The Arithmetic Teacher. Vol 33 (6) February, 6-7,32.

Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun: Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuskeskus.

Kupari, P., Reinikainen, P., Nevanpää, T. & Törnroos, J. 2001. Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7.

Kupari, P., Välijärvi, J., Linnakylä, P., Reinikainen, P., Brunell, V., Leino, K., Sulkunen, S., Törnroos, J., Malin, A. & Puhakka, E. 2004. Nuoret osaajat: PISA 2003 -tutkimuksen ensituloksia. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kyttälä, M. 2008. Visuaalis-spatiaalisten työmuistivalmiuksen yhteys (esi)matemaattisiin taitoihin ja merkitys osana matemaattisilta taidoiltaan heikkojen lasten ja nuorten kognitiivista prosessia. Helsinki: Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 293.

Lambdin, D.V. & Walcott, C. 2007. Changes throught the Years: Connections between Psychological Learning Theories and the School Curruculum. In Martin, G.M., Structhens, M.E. & Elliot, P.C. (Eds.) The Learning of Mathematics: Sixty-ninth Yearbook. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 3-23.

Lamon, S.J. 1999. Teaching Fractions and Rations for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers. New Jersey: Lawrence Erbaum Associates.

Lamon, S. 2001. Presenting and Representing: From Fractions to Rational Numbers. In Cuoco, A.A. The Roles of Representations in School Mathematics. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics Inc, 146-165.

Lampinen, A & Korhonen, H. 2010. Matematiikkaa kaikille – Eszter Neményin haastattelu. Dimensio (1), 18-22.

Lavonen, J. 2009. Suomalaisen perusopetuksen tavoitteet ja tuntijaon toimivuus PISA-arviointien tulosten valossa. Muistio opetushallituksen tuntijakotyöryhmälle. http://www.oph.fi/download/115725_lavonen_PISA_tavoitteet.pdf. Tarkastettu 3.3.2011.

Laycock, M. 1983. The Future of Fractions. In Zweng, M., Green, T., Kilpatrick, J., Pollak, H. & Suydam, M. (Eds.) Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. Boston: Birkhäuser Inc, 41-43.

Leino, J. 1992. Uutta ajattelua matematiikan opetukseen! Kasvatus vol. 23 (1), 40-46.

Lester, F.K. 1984. Preparing Teachers to Teach Rational Numbers. The Arithmetic Teacher vol. 31 (6), 54-56.

Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalien käyttö matematiikan opiskelussa. Tampere: Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis ser A vol 307.

Linnanmäki, K. 2004. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (Toim.) Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 241-254.

Luoma-aho, E. 2010. Matematiikan peruskäsitteiden historiaa. Verkkolehti Solmu. http://solmu.math.helsinki.fi/2010/kasitehist/AlgebraJaAritmetiikka.pdf. Tarkistettu 25.7.2010.

Madaus, G. Russell, M. & Higgins, J. 2009. The Paradoxes of High Stakes Testing. USA: Information Age Publishing.

Malaty, G. 1986. Matematiikan opetuksesta. Osa 1: lähimenneisyyden tempoilut. Dimensio (4), 48-51.

Malaty, G. 1998. Eastern and Western Mathematical Education: Unity, Diversity and Problems. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology vol. 29 (3) May/June, 420-436.

Malaty, G. 2003. Johdatus matematiikan rakenteeseen. Helsinki: Yliopistopaino.

Malaty, G. 2004. Probleemaratkaisu, matemaattiset probleemat ja matemaattiset rakenteet. Teoksessa Enkenberg, J. & Kentz, M. (Toim.) Kasvatuksen maisemista. Joensuu: Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, 105-132.

Malaty, G. 2007. PISA Results and School Mathematics in Finland: Strengths, Weaknesses and Future. In Proceedings of the 9th International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project: Mathematics Education in a Global Community. Charlotte: The University of North Carolina, 420-424.

Martio, O. 2007. Matematiikan osaamisesta ja oppimisesta. Arkhimedes (2), 30-31

McNeill, D.M. 1997. Tranforming Student Assessment. Phi Delta Kappan (1), 39-40.

Metsämuuronen, J. 2005. Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä. Helsinki :International Methelp.

Metsämuuronen, J. 2010. Osaamisen ja asenteiden muutos perusopetuksen 3.-5. –luokilla. Teoksessa Niemi, E.K. & Metsämuuronen, J. (Toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Helsinki: Opetushallitus. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2.

Moyer, P.S. 2002. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. Educational Studies in Mathematics vol. 47 (2), 175-197.

Mueller, M.F. & Mahen, C.A. 2010. Promoting Equity Through Reasoning. Teaching Children Mathematics vol. 16. (9), 540-547.

Myrberg, L. 1974. Differentiaali- ja integraalilaskenta. Tampere: Tammi.

Niemi, E.K. 2008. Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2007. Helsinki: Opetushallitus.

Niemi, E.K. 2010. Matematiikan oppimistulokset 6. vuosiluokan alussa. Teoksessa Niemi, E.K. & Metsämuuronen, J. (Toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Helsinki: Opetushallitus. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2.

Norton, A. 2008. Josh´s operational Conjectures: Abductions of a Splitting Operation and the Construction of New Fractional Schemes. Journal for Research in Mathematics Education vol. 39 (4) July, 401-430.

Novillis, C. 1976. An Analysis of the Fraction Concept into a Hierarchy of Selected

Subconcepts and the Testing of the Hierarchical Dependencies. Journal for Research in Mathematics Education vol. 7 (3), 131-144.

Norris, N., Aspland, R., MacDonald, B., Schstak, J. & Zamorski, B. 1996. Arviointi peruskoulun opetussuunnitelmauudistuksesta. Helsinki: Opetushallitus.

Nummenmaa, L. 2004. Käyttäytymistieteiden tilastolliset menetelmät. Helsinki: Tammi.

Näveri, L. 2009. Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana. Helsingin yliopisto. Käyttäytymistieteellinen tiedekunta. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 309.

OECD 2010. PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do. Pariisi: OECD.
Opetushallitus 2004. Perusopetuksen Opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus

Opetushallitus 2009a. LUMA – Suomen menestystekijä nyt ja tulevaisuudessa. Matematiikan ja luonnontieteiden neuvottelukunnan muistio 2009. http://www.oph.fi/instancedata/prime_product_julkaisu/oph/embeds/110468_luma_neuvottelukunnan_muistio_2009.pdf. Tarkastettu 11.4.2011.

Opetushallitus 2009b. Matematiikan oppimistulosten arviointi peruskoulun 9. luokalla. http://oph.fi/ajankohtaista/uutisarkisto/102/matematiikan_oppimistulosten_arviointi_peruskoulun_9_luokalla_koepaiva_5_4_2011. Tarkastettu 28.2. 2011.

Opperi. 2010. Loogiset palat. http://www.opperi.fi/02_opetusvinkkeja/211_loogisetpalat.html. Tarkastettu 18.2.2011.

Paasonen, J. 1993. Matematiikan opetus perusteitaan etsimässä. Kasvatus (2), 166-170.

Pehkonen, E. 1994. Avoimet tehtävät vastauksena oppimisnäkemyksen esittämiin haasteisiin. Teoksessa Seppälä, R. (Toim.) Matematiikka – taitoa ajatella. Jyväskylä: Gummerus, 60-64.

Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylä: Yliopistopaino. Studies in Education, Psychology and Social Research 195.

Post, T. 1988. Some Notes on the Nature of Mathematics Learning. In Post, T. (Ed.) Teaching Mathematics in Grades K-8: Research Based Methods. Boston: Allyn & Bacon, 1-19.

Post, T.R., Cramer, K.A., Behr, M., Lesh, R. & Harel, G. 1993. Curriculum Implications of Research on the Learning, Teaching and Assessing of Rational Number Concepts. In Carpenter, T., Fennema, E. & Romberg (eds.) Rational Numbers: An Integration of Research. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 327-362.

Price, R.H, Glickstein, M., Horton, D.L. & Bailey, R.H. 1982. Principles of Psychology. New York: Holt, Rinehart, Winston.

Putkonen, H. 1993. Toiminnalliset tehtävät ala-asteen matematiikan kokeessa. Dimensio (3), 40-41.

Päivärinta, L. & Näätänen, M. 2006. Ajatuksia matematiikasta, sen opettamisesta ja soveltamisesta. Verkkolehti Solmu (3), 4-5. http://solmu.math.helsinki.fi/2006/3/solmu36.pdf. Tarkastettu 17.3. 2011.

Rauste-von Wright, M. & von Wright, J. 1994. Oppiminen ja koulutus. Juva: WSOY.

Remillard, J.T. & Bryans, M.B. 2004. Teachers´ Orientation Toward Mathematics Curriculum Materials: Implications for Teacher Learning. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 35 (5) November, 352-388.

Riddle, M. & Rodzwell, B. 2000. Fractions: What Happens Between Kindergarden and the Army? Teaching Children Mathematics vol. 7 (4) December, 202-206.

Riedesel, C.A. & Callahan, L.G. 1977. Elementary School Mathematics for Teachers. New York: Harper & Row Inc.

Rinne, R. 1993. Oppikirjankustantajat luottavat: Markkinakilpailu takaa tason. Opettaja vol. 88 (47), 12-13.

Ritter, J. 2000. Egyptian Mathematics. In Selin, H. (ed.) Mathematics Across Cultures. Iso-Britannia: Kluwer Academic Publishers, 115-136.

Ruokamo, H. 2000. Matemaattinen lahjakkuus ja matemaattisten sanallisten ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen teknologiaperustaisessa oppimisympäristössä. Helsinki: Hakapaino.

Saxe, G.B., Shaugnessy, M.M., Shannon, A., Langer-Osuna, J.M., Chinn, R. & Gearhart,M. 2007. Learning about Fractions as Points on a Number Line. In Martin, G.M., Structhens, M.E. & Elliot, P.C. (Eds.) The Learning of Mathematics. Sixty-ninth Yearbook. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 221-238.

Schweiger, F. 2006. Fundamental Ideas: A Bridge Between Mathematics and Mathematical Education. In (Maasz, J. & Schloegemann, W. (Eds.) New Mathematics Education Research and Practice. Rotterdam: Sense Publishers, 63-73.

Schunk, D.H. 2009. Learning Theories: An Educational Perspective. Lontoo: Pearson Education.

Selin, H. 2000. Mathematics Across Cultures. Iso-Britannia: Kluwer Academic Publishers.

Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Tampere: Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis 710.

Sinnemäki, J. 1998. Tietokonepelit ja sisäinen motivaatio - kahdeksan kertotaulujen automatisointipeliä. Helsinki: Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 186.

Sizer, W. 2000. Traditional Mathematics in Pacific Cultures. In Selin, H. (ed.) Mathematics Across Cultures. Iso-Britannia: Kluwer Academic Publishers, 253-288.

Skypek, D.H.B. 1984. Special Characteristics of Rational Numbers. The Arithmetic Teacher 31 (6), 10-13.

Smith, J.P. 2002. The Development of Students´ Knowledge of Fractions and Ratios. In Litwiller, B (Ed.) Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions. Reston: The National Council of Teachers of Matematics Inc, 3-1.

Soro, R. & Pehkonen, E. 1998. KASSEL-projekti osa 1. Peruskoulun oppilaiden matemaattiset taidot kansainvälisessä vertailussa. Helsinki: Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 197.

Sriraman, B & English, L.D. 2005. On the Teaching and Learning of Dienes' principles. ZDM - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Vol. 37 (3), 258-262.

Strang, T. 1989. Murtolukukäsitteen hallinta peruskoulun ala-asteella. Julkaisematon lisensiaatintyö. Helsingin yliopisto. Kasvatustieteen laitos.

Streefland, L. 1982. Subtracting Fractions with Different Denominators. Educatinoal Studies in Mathematics vol 13 (3) August, 233-255.

Streefland, L. 1991. Fractions in Realistic Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Suh, J.M. 2005. Third Graders' Mathematics Achievement and Representation Preference Using Virtual and Physical Manipulatives for Adding Fractions and Balancing Equations. http://mason.gmu.edu/~jsuh4/dissertation%20final.pdf

Sulkunen, S., Välijärvi, J., Arffman, I., Harju-Luukkainen, H., Kupari, P., Nissinen, K., Puhakka, E. & Reinikainen, P. 2010. PISA 2009 ensituloksia. Helsinki: Opetushallitus. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2010:21

Suydam, M.N. 1986. Manipulative Materials and Achievement. The Arithmetic Teacher vol 33 (6) February, 10,32.

Swan, M. 1993. Assessing a wider range of Students´ Abilities. In Webb, M (Ed.) Assessment in the Classroom. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 26-34.

Thornton, C.A. & Wilmot, B. 1986. Special Learners. The Arithmetic Teacher vol. 33 (6) February, 38-41.

Tossavainen, T. 2008. Matematiikan opetuksesta ja osaamisesta – vielä ainakin kerran. Verkkolehti Solmu (3), 23-24. http://solmu.math.helsinki.fi/2008/3/solmu42.pdf. Tarkastettu 16.3. 2011.

Törnroos, J. 2004. Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset – seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13.

Uusikylä, K & Atjonen, P. Didaktiikan perusteet. Porvoo: WSOY.

Virta, A. 1999. Uudistuva oppimisen arviointi – mahdollisuuksia ja varauksia. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos. Julkaisuja B:65.

Vitikka, E. 2009. Opetussuunnitelman mallin jäsennys. Helsinki: Suomen kasvatustieteellinen seura. Kasvatusalan tutkimuksia 44.

Vornanen, I. 1984. Ensiluokkalaisten lukukäsitteen kehittäminen. Oulu: Oulun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Tutkimuksia 23.

Vuorenmaa, M. 2001. Ikkunoita arvioinnin tuolle puolen: Uusia avauksia suomalaista koulutusta koskevaan evaluaatiokeskusteluun. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 176.

Wiliam, D. & Black, P. 2006. The Reliability of Assessment. In Gardner, J. (Ed.) Assessment and Learning. London: SAGE Publications Ltd.

Willoughby, S.S. Successes and Failures in of Mathematics Curricula in the Past Two Decades. In (Zweng, M., Green, T., Kilpatrick, J., Pollak, H. & Suydam, M. (Eds.) Proceedings of the Fourth International Congress in Mathematical Education. Boston: Birkhäuser Inc, 364-366.

Yrjönsuuri, R. 1993. Algoritminen ja reflektoiva ajattelu matematiikan opiskelussa. Teoksessa Paasonen, J., Pehkonen, E. & Leino, J. (toim.) Matematiikan opetus ja konstruktivistmi – teoriaa ja käytäntöä. Helsinki: Yliopistopaino. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116, 45-55.

Tutkitut oppikirjat:

Koivisto, M., Salonen, M., Sintonen, A., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2006. Laskutaito 5 kevätosa. Opettajan kirja. Helsinki: WSOY.

Asikainen, K., Fälden, H., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. 2005. Tuhattaituri 5. Opettajan opas. Helsinki: Otava.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. 2010. Tuhattaituri 5a. Opettajan opas. Helsinki: Otava.

Lilli, M., Ranta, P., Hänninen, L., Laine, A., Putkonen, H. & Sinnemäki, J. 2005. Matikkamatka 5 syksy. Opettajan opas. Helsinki: Tammi.

Liitteet

Liite 1 Itse valmistamani murtolukukokeet: mekaaninen koe

Liite 2 Itse valmistamani murtolukukokeet: ymmärrystä mittaava koe

Liite 3 Murtokakut

Liite 4 Värisauvat

Liite 5 Värinapit

Liite 6 Kuvaajien tarkat arvot

Liite 7 Lukujärjestelmien ja murtolukujen historiaa