



Matematiikan osaaminen vahvaksi

Iloa opetukseen ja oppimiseen

Hannele Ikäheimo

HEROn webinaari 16.9.2021

Taustaa



Omat matematiikan oppimisvaikeudet ennen lukiota



Iloa oppimisessa ja opettamisessa luokilla 1–9



Iloa kouluttamisessa ja opettamisessa



Iloa oppimateriaalien tekemisessä

Iloa kouluttamisessa ja opetuksessa

Matematiikan
oppimisvaikeuksien
tutkimusta ja koulutusta

Matematiikan esi- ja
alkuopetuksen
koulutusta ja projekteja

Matikkamaa

Luokkien 1–9 matematiikan
yleis- ja erityisopetuksen
koulutusta ja projekteja

Yksityisopetusta
kaikenikäisille



Sisällys



Osa I Taustaa ja teoriaa

1. Matematiikan opettamisen ja oppimisen iloa 13
2. Kymmenjärjestelmä matematiikan osaamisen perustana 33
3. Matematiikan oppimisen teorioista ja tutkimuksista 49

Osa II Opettämisen periaatteet

4. Matematiikan opettamisen tavoitteet ja toimintatavat 63
5. Välineet ja niiden merkitys..... 123
6. Lukukäsitteen ja laskujen opettamisen periaatteet 149

Osa III Opettämisen käytännöt ja esimerkit

7. Matematiikan tiilitalon perusta vahvaksi lukualueella 0–20 171
8. Laskutaito kuntoon ymmärtäen lukualueella 20–100..... 233
9. Kymmenjärjestelmän hallinta vahvaksi, sadoista miljooniin 295
10. Desimaaliluvut konkreettisesti..... 365
11. Eri lukujärjestelmiä..... 427

Osa IV Mittaamisen ja mittayksiköiden opetus

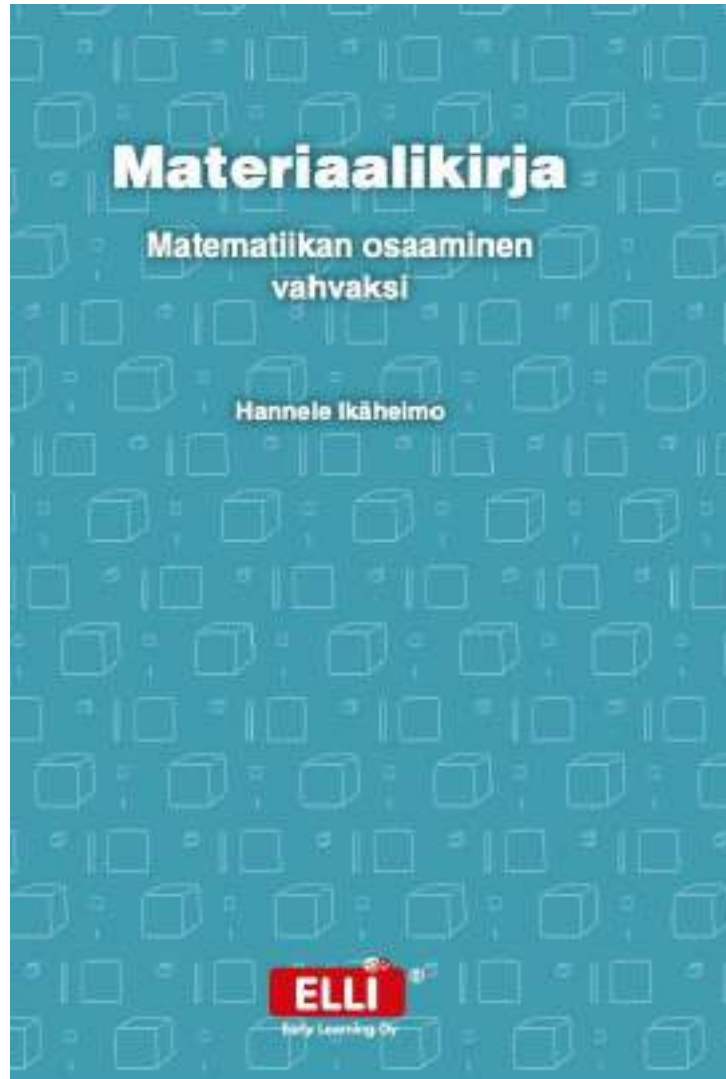
12. Mittaamisen periaatteet 443
13. Pituus, massa ja litratilavuus 459
14. Kuutiotilavuus ja pinta-ala..... 511

Osa V Pelit, videot ja välineet

15. Matematiikan oppimista tukevia pelejä ja videoita..... 543
16. Välineluettelo 561

Osa VI Kirjallisuutta, matemaattisia merkkejä ja käsitteitä, hakemisto

17. Lähteitä ja kirjallisuutta 575
18. Matemaattisia merkkejä ja käsitteitä..... 578
19. Hakemisto 584



Materiaalikirjan sisältö (106 sivua)

- Lyhyet ohjeet (3 sivua)
- Lukukäsitteen ymmärtämiseen liittyvät junnaukset (7 kpl)
- Strategioiden hallintaan liittyvät junnaukset (6 kpl)
- Päässäskujunnaukset (18 kpl)
- Kymppikartoitukset ja -harjoitukset (2 kpl)
- Mittayksikkökartoitukset (2 kpl)
- Muut kopioitavat materiaalit (17 sivua)

Näissä kahdessa kirjassa ei käsitellä
murtolukujen eikä
geometrian opetusta.

Miksi konkreettinen työskentely on tärkeää ja auttaa kaikkia?

Konkretia luo pohjan matematiikan ymmärtämiselle.

Välineet tuovat iloa oppimiseen, koska ne helpottavat ymmärtämistä.

Kun välineillä työskennellään ja samalla selostetaan tekemistä, opitaan oikeat ilmaisut.

Välineet mahdollistavat monikanavaisen oppimisen.

Välineiden avulla voidaan edetä konkreettisesta abstraktiin ja myös abstraktista takaisin konkreettiseen.

Miten matematiikkaa konkretisoidaan?

Konkretisoimisessa voidaan käyttää välineitä, piirtämistä tai puhetta.

Välineiden pitää olla sellaisia, että ne tukevat ymmärtämistä ja oppimista ja muistamista.

Konkretisoinnin avulla edetään helposta vaikeaan.

Matemaattinen ajattelu kehittyy konkreettisesta abstraktiin.

Konkretisoimisessa tekemistä tulee selostaa oikeilla termeillä.



Peli

Kumpi
saa
ekana
20?

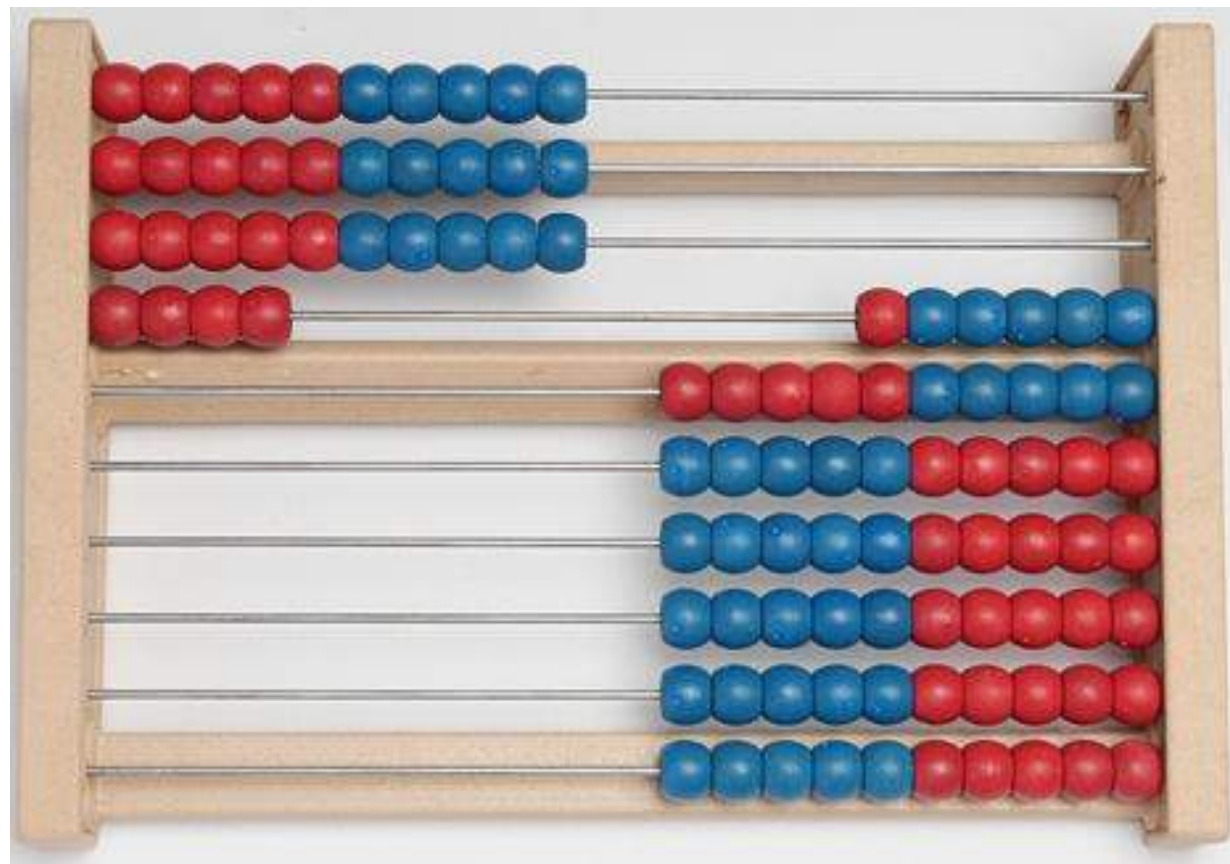




Luku 34
kolmella eri
tavalla
konkretisoituna



34



66

$$34 + \underline{\quad} = 100$$

$$100 - \underline{\quad} = 66$$

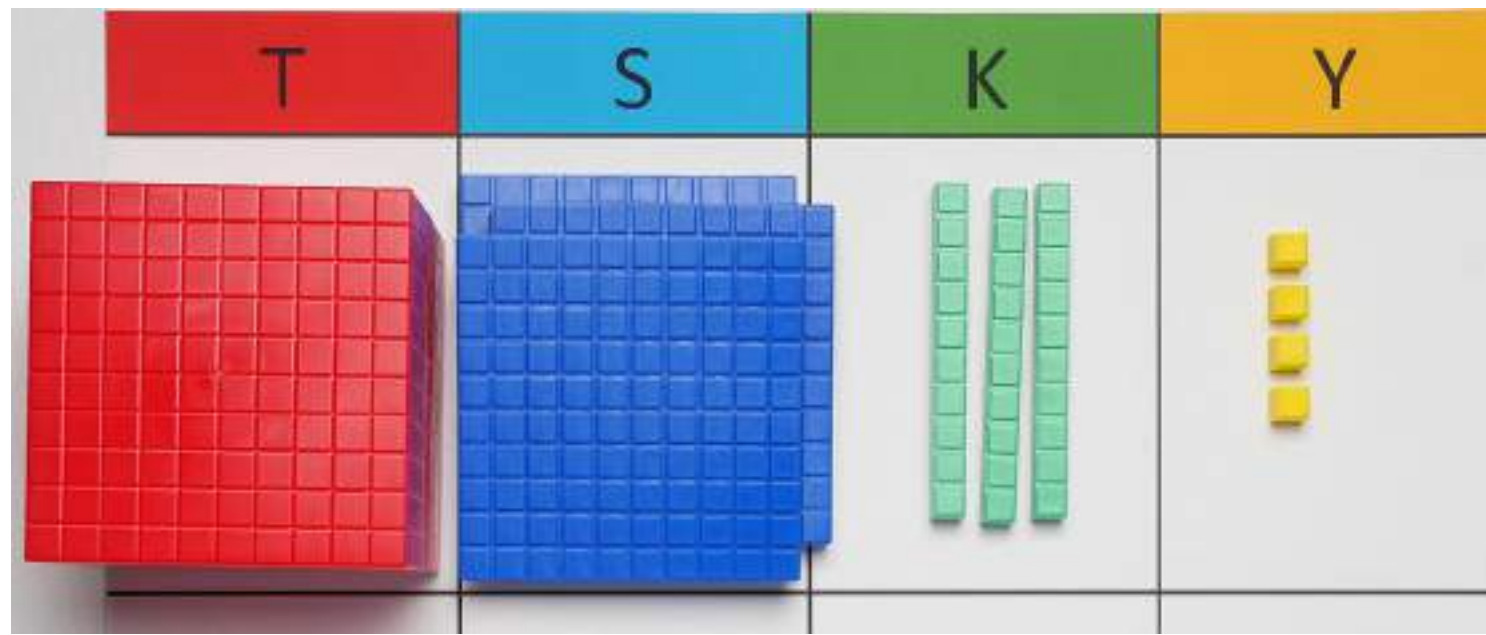
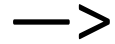
$$\underline{\quad} + 34 = 100$$

Peli

Kumpi pääsee
ekana
sataan?

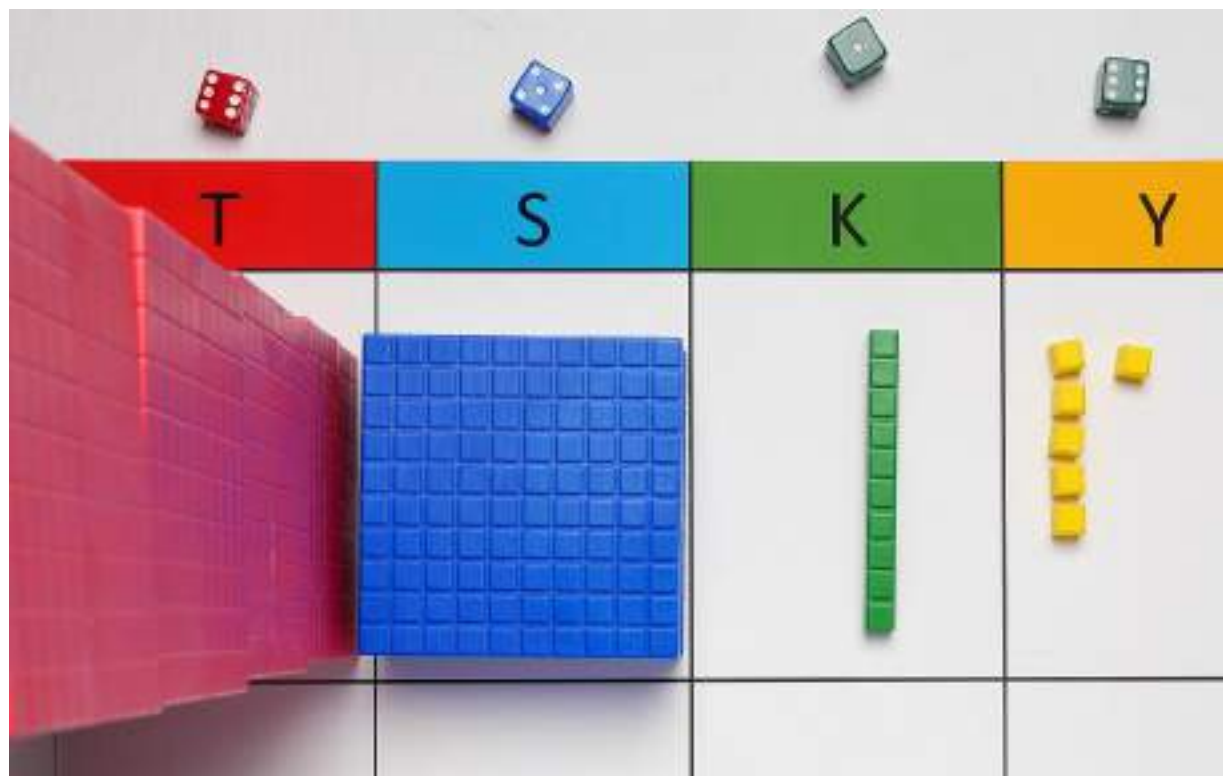


1234



Peli

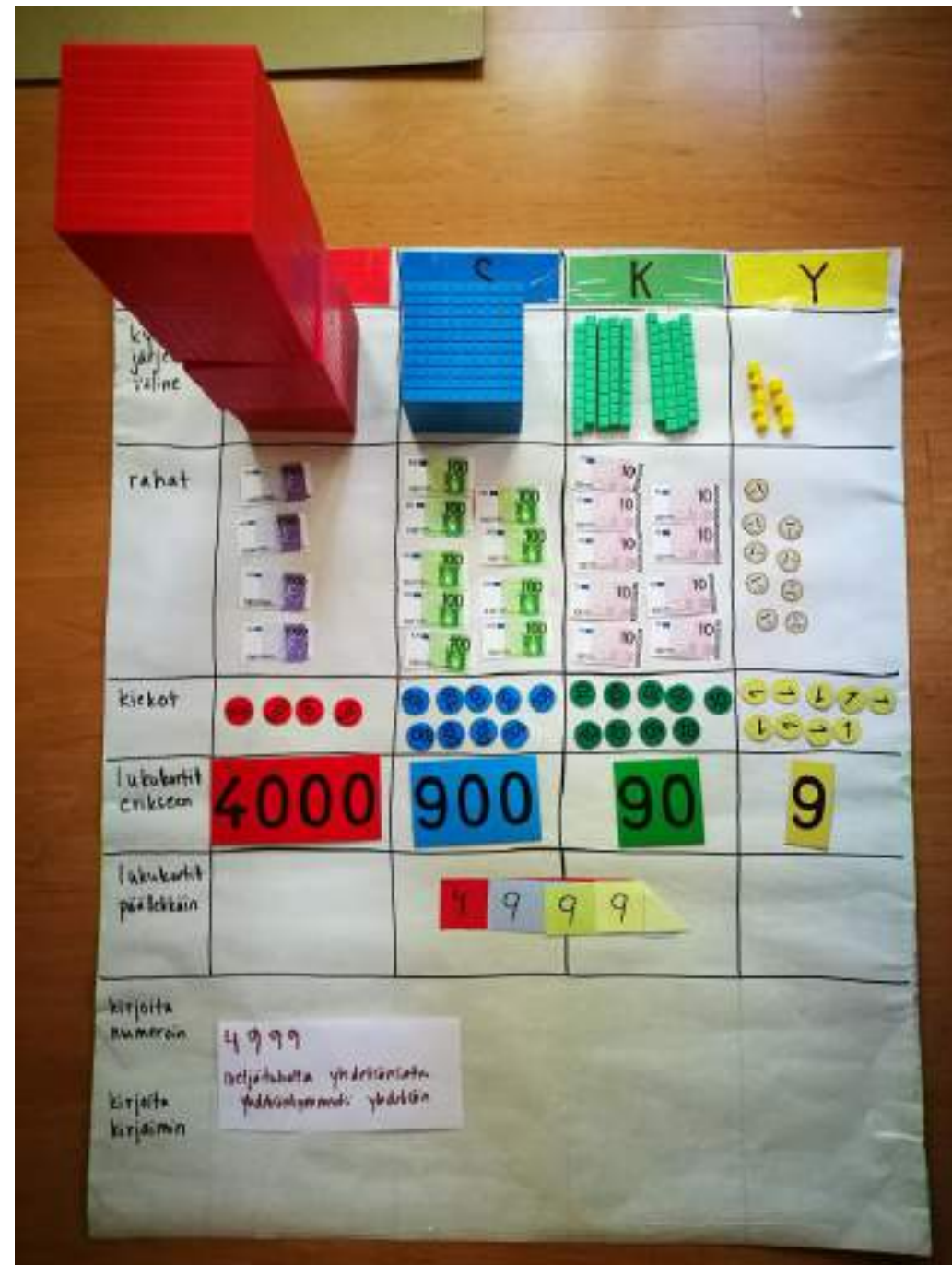
Kuka saa suurimman luvun?



	T	S	K	Y
Pelaaja A	6	5	1	6
Pelaaja B	1	4	1	3
Pelaaja C	2	6	1	6
Pelaaja D	3	3	3	4

Työskentely
konkreettisesta
abstraktiin
sekä
sanoittaminen
eli
kielentäminen

4999


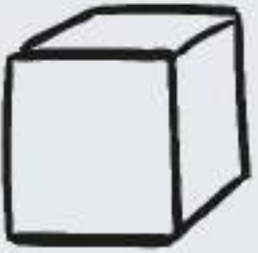














Luonnolliset luvut
1–1000

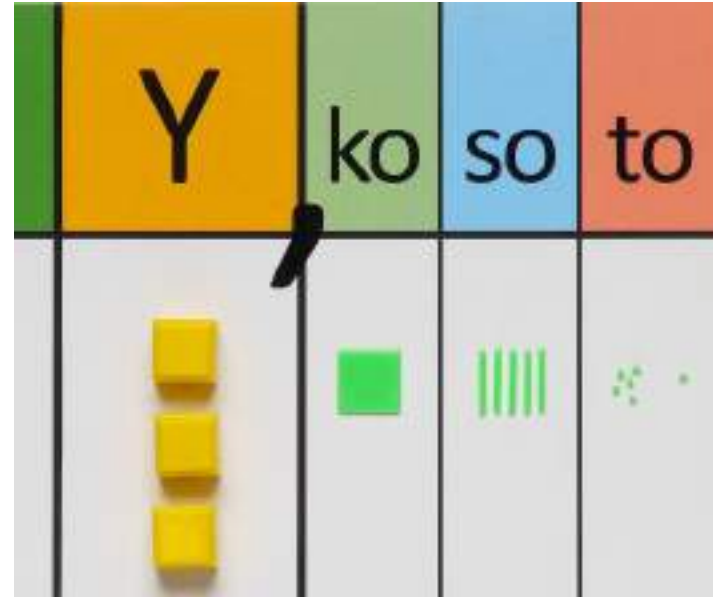
ja

desimaaliluvut
0,1–0,001

konkretisoituina
kymmenjärjestelmä-
välineillä ja
piirtämällä

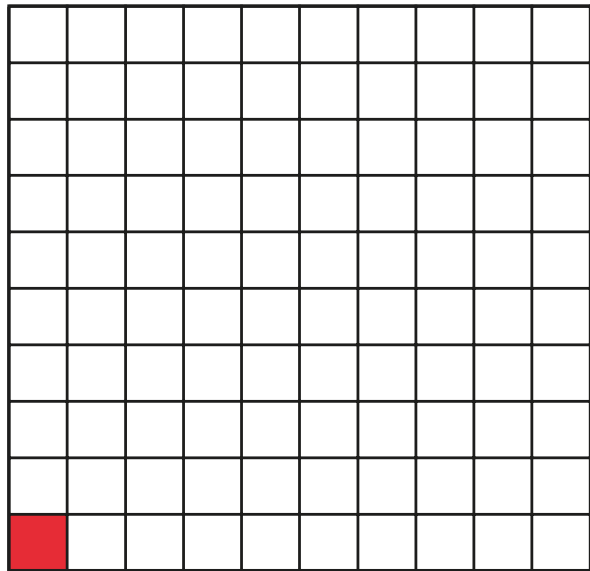
Väline	Valokuva välineestä	Piirros välineestä
Tuhatkuutio		
Satalevy		
Kymppisauva		
Ykköskuutio		
Kymmenesosalevy		
Sadasosasauva		
Tuhannesosakuutio		

$$3,156 = 3 \frac{156}{1000}$$



Desimaaliluku 3,156 rakennettuna paikka-alustalle ja merkittynä sekä desimaalilukuna että murtolukuna. Molemmat luetaan 3 kokonaista 156 tuhannesosaa.

Desimaaliluku, murtoluku ja prosenttiluku



- Ota eteesi sataruudukko ja värikynät.
- Sovitaan, että koko sataruudukko edustaa lukua 1.
- Väritä punaisella yksi ruutu.
- Kuinka paljon yksi ruutu on murtolukuna? (Yksi sadasosa)
- Entä desimaalilukuna? (Yksi sadasosa)
- Entä prosentteina? (Yksi prosentti)
- Voidaan siis kirjoittaa: murtolukuna yksi sadasosa on yhtä suuri kuin desimaalilukuna yksi sadasosa, joka on yhtä suuri kuin yksi prosentti.

$$\frac{1}{100} = 0,01 = 1 \%$$

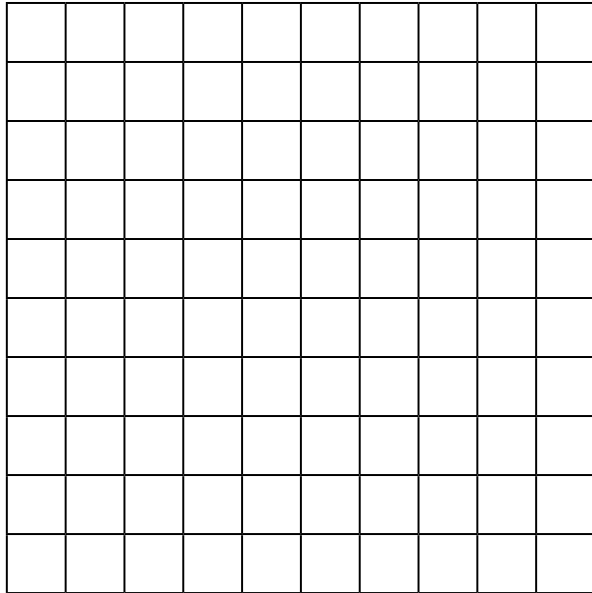
Peli

Prosenttipalapeleissä harjoitellaan muuttamaan murtolukuja desimaaliluvuiksi ja prosenttiluvuiksi.



Desimaaliluvut ja mittayksiköiden muunnokset

Pinta-alan
ja kuutio-
tilavuuden
mittausta
ja yksiköiden
muunnoksia



$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ dm}^2$$



$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3$$

Miksi kymmenjärjestelmä on tärkeä?

Kymmenjärjestelmän rakenteen kautta hahmottuvat pienet ja suuret luvut.

Myös desimaaliluvut kuuluvat kymmenjärjestelmään.

Mittayksiköiden muunnosten oppiminen edellyttää kymmenjärjestelmän hallintaa.

Kymmenjärjestelmän hallinta luo pohjan matematiikan osaamiselle opinnoissa, työelämässä ja arjessa.

Jos kymmenjärjestelmää ei hallita, matematiikan tiilitalo romahtaa.

TAUKO

Tarinaruutu 4.50b. Onko välineiden käyttäminen kokeissa luntaamista?

”Saako kokeissa käyttää apuna konkreettisia välineitä?” Vastauksena tähän alakoulun opettajien kysymykseen olen usein kertonut erään yläasteen opettajan omista kokemuksista matematiikan tunneilta: ”Kaikilla tunneilla oppilailla on mahdollisuus käyttää välineitä. Kokeissa aiheesta riippuen jotkin tehtävät pitää ratkaista ensin välineillä, sitten piirtämällä mallikuva ja merkitsemällä laskulausekkeet numeroin sekä lopuksi muuttujan avulla.”

Kun eräs oppilas palautti kokeen, yksi piirros puuttui. Kysyin häneltä, miten hän sen ratkaisi. ”Ajattelin murtokakuilla.” Pyysin häntä vielä piirtämään ajattelustaan mallikuvan.

Miksi siellä
yläreunassa
on
2 tai 3?

m^2

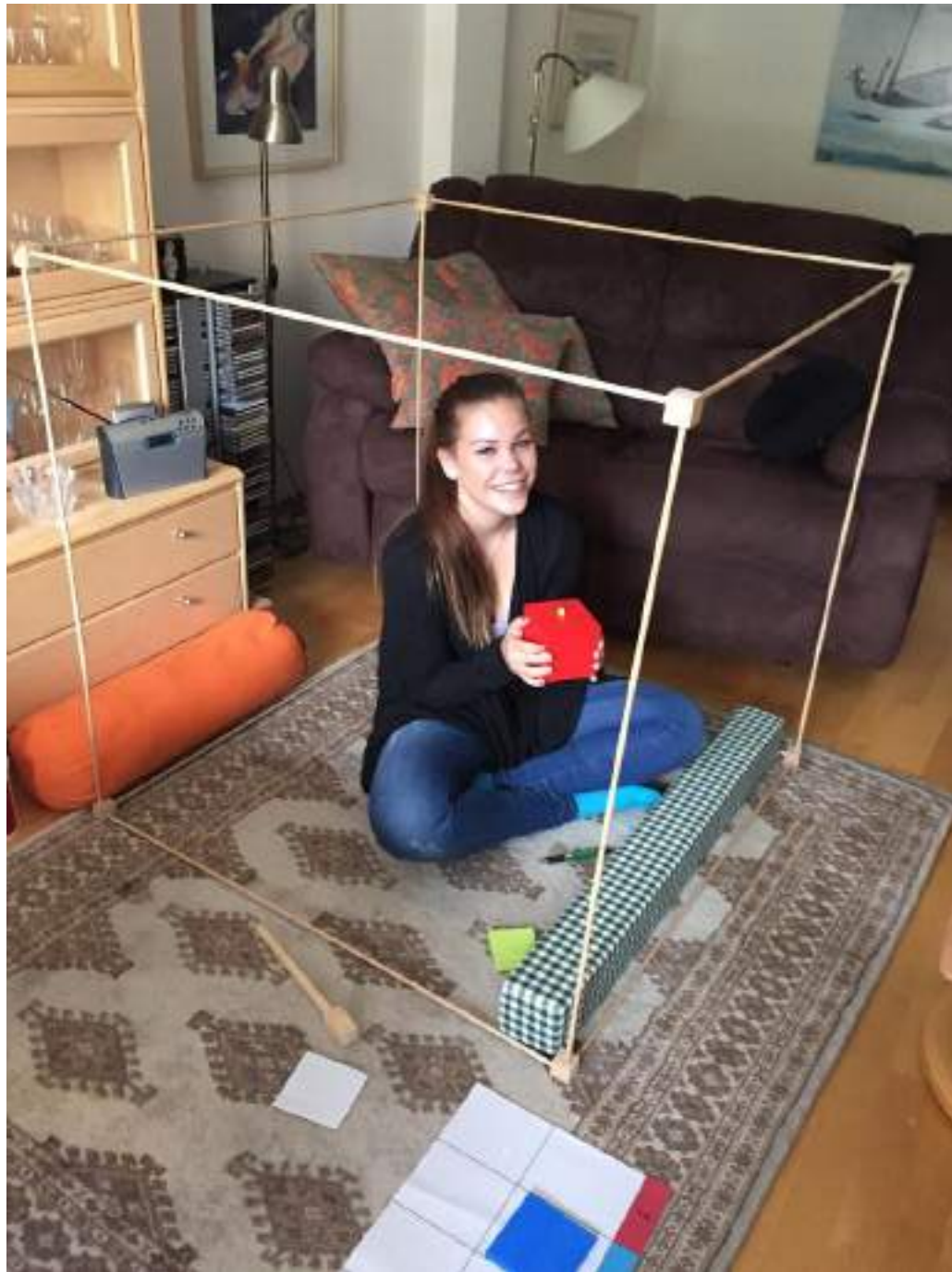
m^3

dm^2

dm^3

Välineillä opitaan
ajattelemaan ja
ymmärtämään
käsitteitä.

Abiturientti Pulmu



Miten saadaan matematiikan tiilitalot vahvoiksi?

Luonnolliset luvut

Algoritmit	Peruslaskut suuremmilla luvuilla lasketaan algoritmimuodossa eli allekkain ja hyödynnetään kymmenjärjestelmää.			
Kerto- ja jakolaskun käsite	Kertolaskut		Jakolaskut	
Yhteen- ja vähennyslaskun käsite	Yhteenlaskut		Vähennyslaskut	
Luonnollisen luvun käsite	Lukujen hajotelmat	Lukujen vertailu	Lukujonot	Lukujen pyöristäminen

Desimaaliluvut

Mittayksiköitä	Mittayksiköiden muunnoksia		
Algoritmi	Peruslaskut suuremmilla luvuilla lasketaan algoritmi-muodossa eli allekkain ja hyödynnetään kymmenjärjestelmää.		
Kerto- ja jakolaskun käsite	Kertolaskut		Jakolaskut
Yhteen- ja vähennyslaskun käsite	Yhteenlaskut		Vähennyslaskut
Desimaaliluvun käsite	Lukujen vertailu	Lukujonot	Lukujen pyöristäminen

Luonnollisten lukujen lukukäsite, lukujonot, lukujen vertailu, arviointi ja pyöristäminen, peruslaskut ja kymmenjärjestelmä

Mittaaminen ja mittayksiköt

Mittayksiköiden muunnoksia 2	Satakertainen ja sadasosa	Tuhatkertainen ja tuhannesosa	
Konkreettinen mittaaminen 2	Pinta-ala	Kuutiotilavuus	
Mittayksiköiden muunnoksia 1	Kymmenkertainen ja kymmenesosa		
Konkreettinen mittaaminen 1	Pituus	Massa	Litratilavuus
Suureet	Ominaisuudet, joita voi mitata		
Mittaamisen periaate	Ensin standardisoimattomilla mitoilla	Sitten standardisoiduilla mitoilla	

Lukukäsite, lukujonot, lukujen vertailu, arviointi ja pyöristäminen, peruslaskut, kymmenjärjestelmä, luonnolliset luvut ja desimaaliluvut

Luonnollisen luvun
käsite luo pohjan
peruslaskuille ja
kymmen-
järjestelmälle.

Luonnolliset luvut

Algoritmit	Peruslaskut suuremmilla luvuilla lasketaan algoritmimuodossa eli allekkain ja hyödynnetään kymmenjärjestelmää.			
Kerto- ja jakolaskun käsite	Kertolaskut		Jakolaskut	
Yhteen- ja vähennyslaskun käsite	Yhteenlaskut		Vähennyslaskut	
Luonnollisen luvun käsite	Lukujen hajotelmat	Lukujen vertailu	Lukujonot	Lukujen pyöristäminen

Desimaaliluvun
käsite luo pohjan
myös
mittayksiköiden
muunnoksille.

Desimaaliluvut

Mittayksiköitä	Mittayksiköiden muunnoksia		
Algoritmi	Peruslaskut suuremmilla luvuilla lasketaan algoritmi-muodossa eli allekkain ja hyödynnetään kymmenjärjestelmää.		
Kerto- ja jakolaskun käsite	Kertolaskut		Jakolaskut
Yhteen- ja vähennyslaskun käsite	Yhteenlaskut	Vähennyslaskut	
Desimaaliluvun käsite	Lukujen vertailu	Lukujonot	Lukujen pyöristäminen

Luonnollisten lukujen lukukäsite, lukujonot, lukujen vertailu, arviointi ja pyöristäminen, peruslaskut ja kymmenjärjestelmä

Konkreettinen
mittaaminen
luo pohjan
mittayksiköiden
muunnoksille.

Mittaaminen ja mittayksiköt

Mittayksiköiden muunnoksia 2	Satakertainen ja sadasosa	Tuhatkertainen ja tuhannesosa	
Konkreettinen mittaaminen 2	Pinta-ala	Kuutiotilavuus	
Mittayksiköiden muunnoksia 1	Kymmenkertainen ja kymmenesosa		
Konkreettinen mittaaminen 1	Pituus	Massa	Litratilavuus
Suureet	Ominaisuudet, joita voi mitata		
Mittaamisen periaate	Ensin stadardisoimattomilla mitoilla	Sitten standardisoiduilla mitoilla	

Lukukäsite, lukujonot, lukujen vertailu, arviointi ja pyöristäminen, peruslaskut, kymmenjärjestelmä, luonnolliset luvut ja desimaaliluvut

OPETUSTEHTÄVÄ • Lukujen 0–20 yhteen- ja vähennyslaskut sekä laskustrategiat

Perusta, jolle rakentuu	Lukukäsite 0–20 ja erityisesti lukujen 2–10 hajotelmat
Oppimistavoitteet	Oppilas ymmärtää yhteen- ja vähennyslaskun käsitteet.
	Oppilas hallitsee sujuvasti eli automaation tasolla yhteen- ja vähennyslaskut lukualueella 0–10.
	Oppilas osaa antaa esimerkin yhteen- ja vähennyslaskusta.
	Oppilas osaa selittää sanallisesti, mitä yhteen- ja vähennyslaskut tarkoittavat.
	Oppilas hallitsee kymmenen ylityksen ja alituksen ilman konkretian tukea.
	Oppilas osaa hyödyntää strategioita yhteen- ja vähennyslaskuissa lukualueella 0–20.
Osaamisen varmistaminen	Luokilla 1 ja 2
	Lukukäsitejunnaukset 1 ja 2
	Päässä-laskujunnaukset 1–3
	Strategiajunnaukset 1



Korjaava opetus Strategiajunnaus 1:n jälkeen:

10 lisää ja 9 lisää



Alkutilanteessa munakennoissa on luku 13 niin, että täyden kennon kansi on kiinni (kuva 1). Todetaan, että kyseessä on lasku $3 + 10 = 13$. Kun kansi avataan, lasku on edelleen sama.



Seuraavaksi otetaan täyden kennon alarivistä oikealta yksi kuutio pois. Todetaan, että näkyvillä on lasku $3 + 9$ (kuva 2).



Seuraavaksi siirretään vasemmalla olevasta kennosta yksi kuutio oikealle tyhjälle paikalle, niin että kenno tulee täyteen (kuva 3). Näin saadaan lasku $2 + 10 = 12$, joka on sama $3 + 9 = 12$.



Tämän jälkeen vaihdetaan kennojen paikkaa (kuva 4). Nyt saadaan lasku $10 + 2 = 12$.

$$3 + 10 = 13$$

$$3 + 9 = ? \quad \rightarrow \quad 3 + 9 = 12$$

$$2 + 10 = ? \quad \rightarrow \quad 3 + 9 = 12$$

$$10 + 2 = ? \quad \rightarrow \quad 10 + 2 = 12$$

Lopuksi kerrataan taululle kirjoitetut laskut. Opetuskeskustelun kulku ks. esimerkki 7.90a, tehtävä 2.

OPETUSTEHTÄVÄ: Desimaaliluvun käsite

Perusta, jolle rakentuu

Luonnollisten lukujen käsite

Oppimistavoitteet

Oppilas osaa

- näyttää desimaaliluvut kymmenjärjestelmävälineillä ja desimaaliosilla ja piirtämällä sekä kertoa, mitä luvut tarkoittavat
- lukea numeroin merkittyjä desimaalilukuja ja kirjoittaa kirjaimin desimaaliluvut, jotka on merkitty numeroin.

**Osaamisen
varmistaminen**

Luokalla 4

Lukukäsitejunnaus 6

Strategiajunnaus 3

Päässälaskujunnaukset 14–17

Kymppikartoitus 2

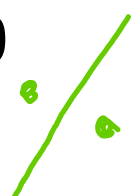


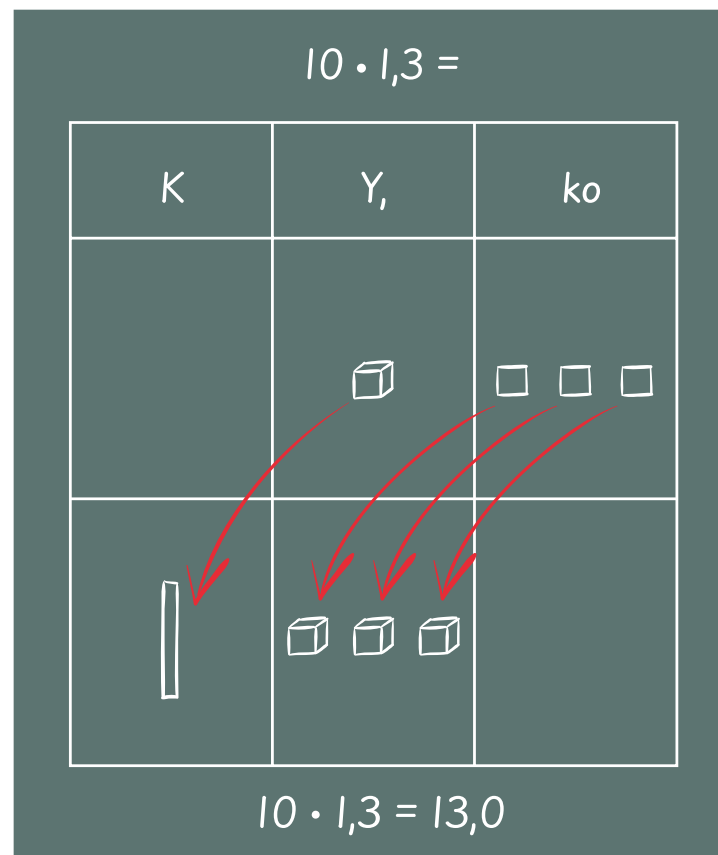
Korjaava opetus Kymppikartoitus 2:n jälkeen

Kartoituksessa tehty virhe

$$10 \cdot 1,3 = 1,30 \quad \checkmark$$

Piirroksen avulla laskettuna

$$10 \cdot 1,3 = 13,0$$




Matemaattisten termien oikea käyttö tukee ymmärtämistä ja oppimista.

Merkki	Sanallinen selitys	Merkittynä	Sanallisesti
+	yhteenlaskun merkki	$2 + 3$	2 plus 3
-	vähennyslaskun merkki	$5 - 2$	5 miinus 2
·	kertolaskun merkki	$2 \cdot 5$	2 kertaa 5
:	jakolaskun merkki	$10 : 2$	10 jaettuna 2:lla tai 10 jaettuna 2:lle
—		$\frac{10}{2}$	
/		$10/2$	
—	murtoviiva	$\frac{2}{10}$	kaksi kymmenesosaa

Kirjan lopussa on yhteenveto matemaattisista merkeistä ja käsitteistä koulumatematiikan näkökulmasta.

Matemaattisia käsitteitä, esimerkkejä

Hajotelma	Luvun esittäminen kahden tai useamman luvun yhdistelmänä. Esimerkiksi luku 5 voidaan esittää seuraavina hajotelmina: 0 ja 5, 1 ja 4, 2 ja 3, 3 ja 2, 4 ja 1, 5 ja 0 ja 5. Hajotelmia harjoiteltaessa tehdään yhdestä luvusta kaikki mahdolliset yhdistelmät. Hajotelmat vahvistavat peruslaskujen käsitteiden ymmärtämistä.
Jakolasku	Lasku, jossa luku jaetaan toisella luvulla ja saadaan vastaukseksi näiden lukujen osamäärä. Jakolaskuja on kaksi: ositus- ja sisältöjako (\rightarrow). <ul style="list-style-type: none">– Luku, joka jaetaan on jaettava ja luku jolla jaetaan on jakaja. Jakajana ei voi olla nolla.– Jakolaskun käänteinen operaatio on kertolasku.– Jakolasku ei ole vaihdannainen, eli samaa tulosta ei saada, jos jaettava ja jakaja vaihtavat paikkaa.– Jos jako päättyy tasan, luku on jaollinen. Aina jako ei pääty tasan ja silloin yli jää jakojäännös.

TAUKO

Tarinaruutu 5.10a. Neliö vai kuutio?

Aikuisten on tärkeää puhua välineistä niiden oikeilla nimillä. Muistan eräät 9. luokan oppilaat, joille näytin umpinaista kuutiodesimetriä ja kysyin, mikä se on.

Vastauksena tuli hyvin varmasti: "Neliö." Kun tutkailimme tuota kuutiota, totesimme, että sen tahkoina on yhteensä kuusi neliötä, joten se ei voi olla neliö. "Sehän on kuutio!" Oppilailla oli geometrisistä kappaleista kokemuksia etupäässä oppikirjan kuvien perusteella, ei omakohtaisina käsin kosketeltavina malleina.

Lähdin tämän jälkeen päiväkotiin, jossa minulla oli vuoden kestävä matikkaprojekti. Viisivuotiaiden ryhmässä istui tyttö, joka totesi iloisena: "Ihania kuutioita!". Hän hypisteli käsissään vaaleanpunaisia multilink-kuutioita. Aikuiset olivat puhuneet kuutioista eivätkä vain palikoista.

Tarinapaperit
auttavat ymmärtämään
sanallisia tehtäviä ja ohjaavat
pois mekaanisesta laskemisesta

Tarinapaperi, joka alkaa laskulla

Tarinapaperi 1, joka alkaa laskulla.

1. Lasku

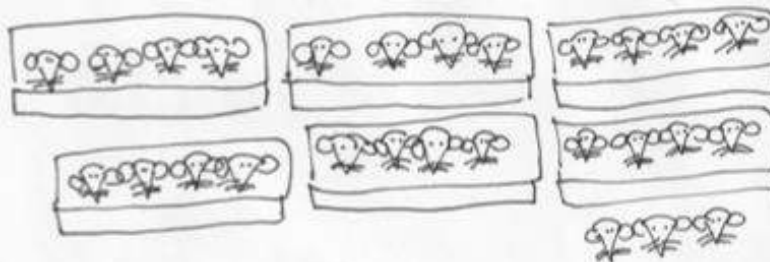
$$27 : 4 = ?$$

2. Kirjoita laskuun liittyvä tarina ja keksi laskuun liittyvä kysymys.

Eläintarhassa lajiteltiin gerbiileitä neljän gerbiilin häkkeihin. Gerbiileitä oli yhteensä 27.
Kuinka monta häkkiä tarvittiin?

3. Ratkaise tarinaan liittyvä kysymys välineillä. Piirrä sen jälkeen kuva ratkaisusta.

Voit ratkaista tehtävän myös pelkästään piirtämällä.



4. Kirjoita kysymyksen ratkaisu sanallisesti.

Tarvittiin 6 häkkiä ja 3 gerbiilia jäi ulkopuolelle.

5. Kirjoita tarinaan ja kysymykseen liittyvä lasku sekä sen tulos matematiikan kielellä.

$$27 : 4 = 6, \text{ jää } 3$$

Tarinapaperi, joka alkaa tarinalla

Tarinapaperi 2, joka alkaa tarinalla.

1. Tarina

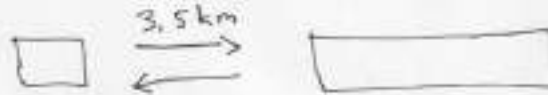
Oppilas pyöräili kouluun joka koulupäivä. Kotoa koulun oli matkaa 3,5 km. Muita matkoja hän ei pyöräillyt kouluviikon aikana. Pyörän matkamittari näytti sekä metrejä että kilometrejä.

2. Tarinaan liittyvä kysymys sanallisesti

Kuinka monta metriä oppilas pyöräili joka koulupäivä? Kuinka monta kilometriä hän pyöräili viikon aikana?

3. Ratkaise tarinaan liittyvä kysymys välineillä. Piirrä sen jälkeen kuva ratkaisusta. Voit ratkaista tehtävän myös polküstään piirtämällä.

ma ti ke to pe



4. Kirjoita tarinaan ja kysymykseen liittyvä lasku sekä sen tulos matematiikan kielellä.

$$2 \cdot 3,5 \text{ km} = 7 \text{ km} = 7000 \text{ m}$$

$$5 \cdot 7 \text{ km} = 35 \text{ km}$$

5. Kirjoita tarinaan liittyvän kysymyksen ratkaisu sanallisesti.

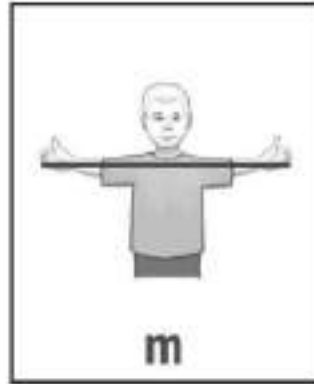
Oppilas pyöräili joka koulupäivä 7 km,
joka on 7000 m.
Kouluviikon aikana hän pyöräili 35 km.

Mittaamista ja piirtämistä kotona ja koulussa

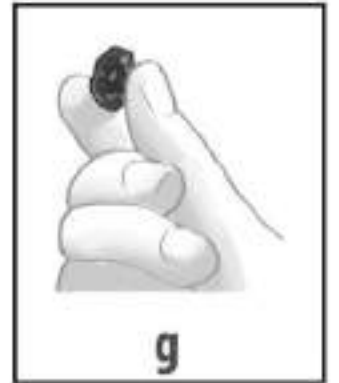


Tukipisteet
auttavat
ymmärtämistä
ja
helpottavat
muistamista.

Pituus



Massa



Litratilavuus



”En oo tiennyt, että tässä on systeemi!” (lukiolainen)

Pituusyksiköt

km

hm

dam

m

dm

cm

mm

Massan yksiköt

kg

hg

dag

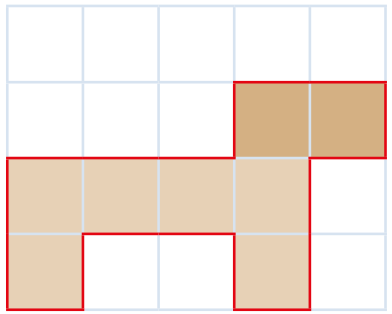
g

dg

cg

mg

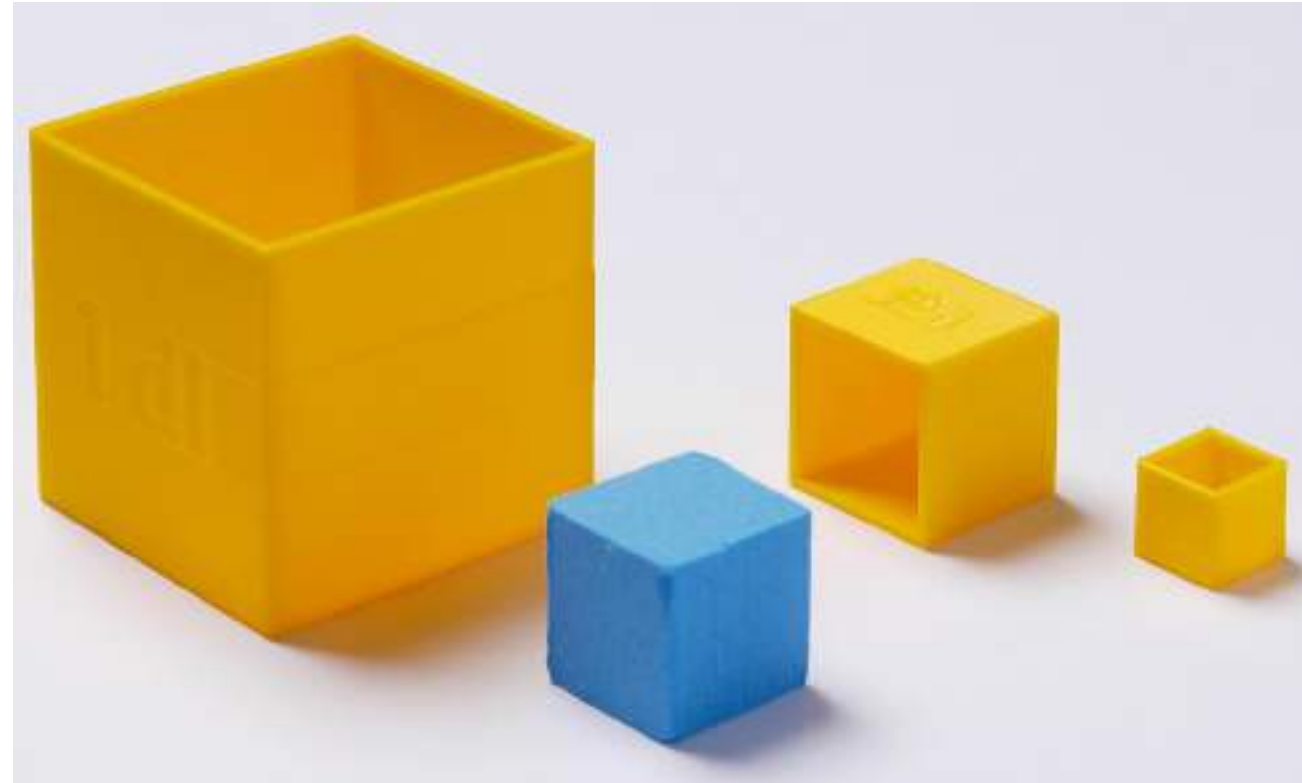
1-, 2- ja 3-ulotteisuus



Koiran
piiri 18 cm ja
pinta-ala 8 cm²

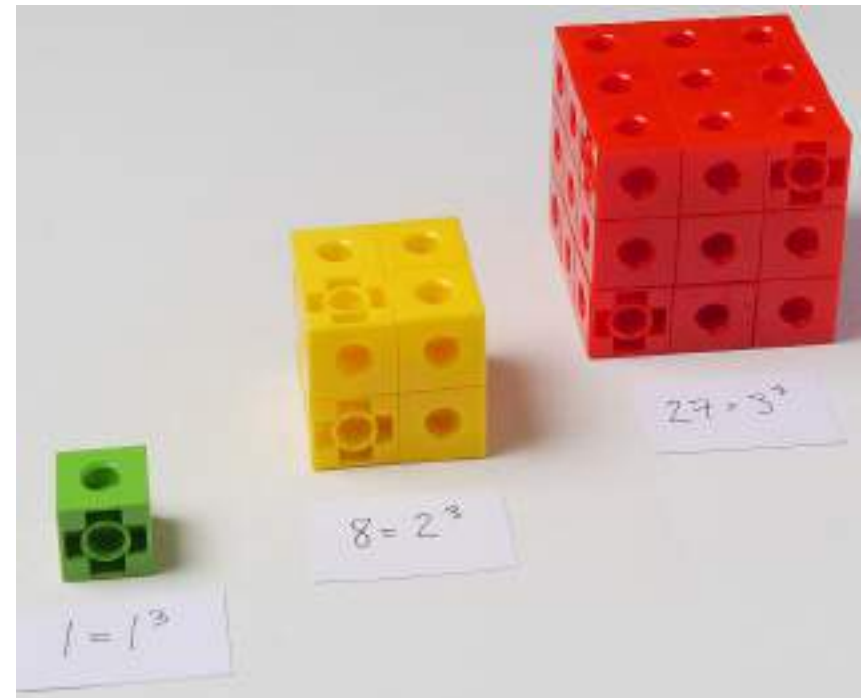
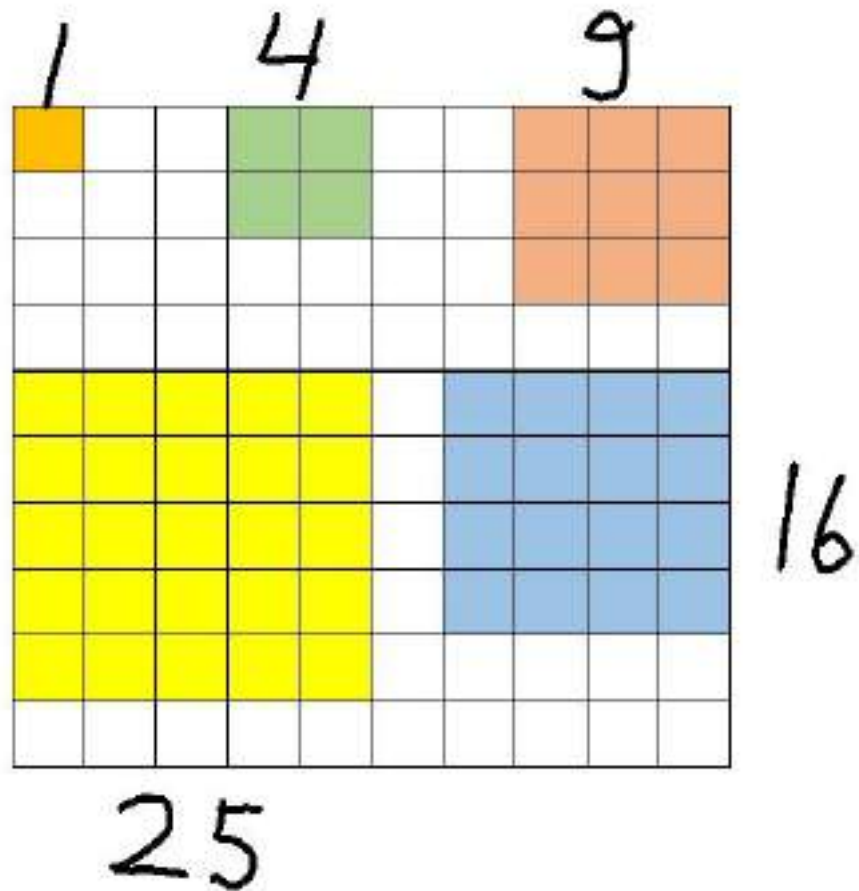


Piirejä ja
pinta-aloja

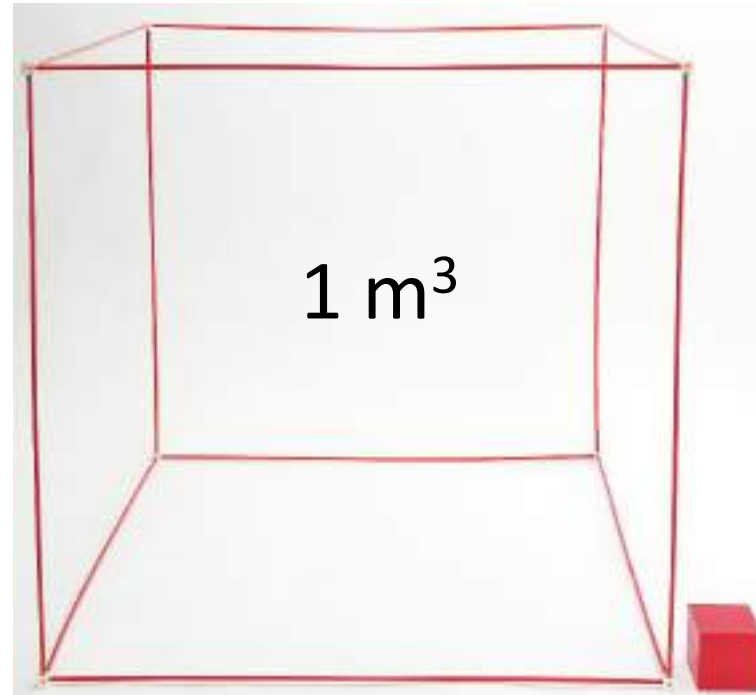


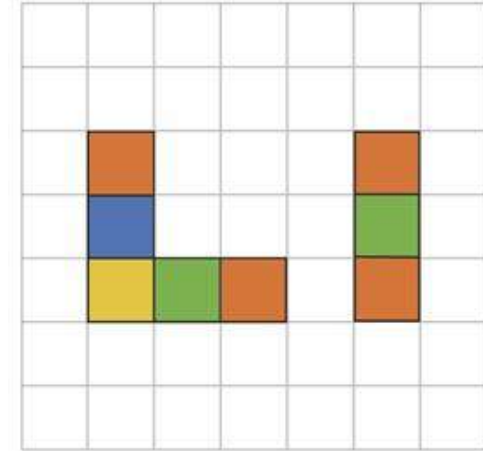
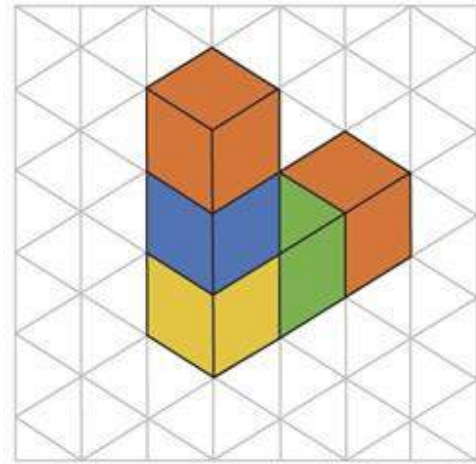
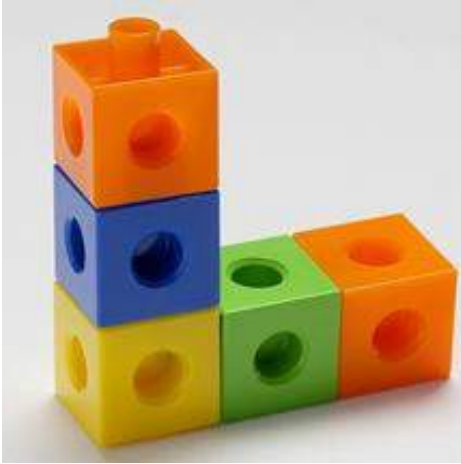
Tilavuuksia

Neliölukuja ja kuutiolukuja



Neliömetri, kuutiometri ja kuutiodesimetri





Kolmiulotteinen rakennelma ja siitä tehdyt piirroksat



”Tää on huijausta... ei tarvii laskea, voi vaan ajatella!” (Nea)