OULUN YLIOPISTO
UNIVERSITY of OULU

Tytti Nissilä

”Ei oo sillee aateltu ku lisätään vaan nollia perään eikä siirretä pilkkua”: Kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinta peruskoulun kuudennella luokalla

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNTA
Luokanopettajan koulutus
2017

OULUN YLIOPISTO
UNIVERSITY of OULU

Kasvatustieteiden tiedekunta
Faculty of Education

Tiivistelmä opinnäytetyöstä
Thesis abstract

Luokanopettajankoulutus		Tekijä/Author Tytti Tuulikki Nissilä	
Työn nimi/Title of thesis Kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinta peruskoulun kuudennella luokalla			
Pääaine/Major subject Kasvatustiede	Työn laji/Type of thesis Pro Gradu -tutkielma	Aika/Year Huhtikuu 2017	Sivumäärä/No. of pages 104+9

Tiivistelmä/Abstract

Tässä Pro Gradu -tutkimuksessa selvitetään peruskoulun kuudennen luokan oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Kohdejoukkona oli erään Pohjois-Pohjanmaan koulun 75 kuudennen luokan oppilasta ja neljä opettajaa. Tutkimusaineistot kerättiin alkukeväästä 2016. Tutkimusmenetelmänä käytettiin mixed methods –menetelmää, jossa yhdistyy määrällinen ja laadullinen tutkimus. Määrällinen aineisto rakentuu kolmen mittarin (Kymppi-kartoitus 2, Mittayksikkö-kartoitus 1, Mittayksikkö-kartoitus 2) tulosten tarkastelemiseen oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Kartoituksesta saadut tulokset taulukoitiin ja analysoitiin tilastollisin menetelmin. Laadullinen aineisto sijoittuu fenomenologiseen tutkimusmenetelmään ja koostuu neljän opettajan haastattelusta. Haastatteluaineisto analysoitiin Perttulan mukailemaa fenomenologista tutkimusmetodia hyödyntäen, jossa tavoiteltiin opettajien kokemusten ja kokemuksista muodostuneiden merkitysten avulla moniulotteisempia näkökulmia oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta.

Teoreettisessa viitekehyksessä tarkastellaan kymmenjärjestelmän osaamisen taustalla vaikuttavien varhaisten matemaattisten taitojen merkitystä ja kymmenjärjestelmätaitojen kehitystä osana paikka-arvokäsitteen sekä kymmenjärjestelmän periaatteen ymmärtämistä. Kymmenjärjestelmän opettamiseen liittyviä peruslähtökohtia avataan perusopetuksen opetussuunnitelman ja aikaisempien tutkimustulosten esittämien näkökulmien avulla. Teoria osuudessa selvitetään mittayksikköjärjestelmän rakennetta osana mittaamisen käsitteen kehittymistä ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Lisäksi tarkastellaan mittaamisen ja mittayksiköiden muunnosten osaamisessa havaittuja haasteita sekä pohditaan opettamiseen liittyviä perusperiaatteita ja opetuskäytänteiden tuomia mahdollisuuksia.

Tutkimustulokset osoittivat, että osalla oppilaista on vakavia puutteita kymmenjärjestelmän hallinnassa. Tutkimustulokset vahvistivat myös matematiikan hierarkkisen luonteen, jossa uudet taidot pohjautuvat aikaisempien taitojen varaan. Tulokset osoittivat, että kymmenjärjestelmän osaamisella on voimakas yhteys mittayksiköiden muunnosten hallintaan. Mittaamisen käsitteen ja mittayksiköiden muunnosten sekä yksiköiden välisten suhdelukujen ymmärtäminen on oppilaille haasteellista. Mittaamiseen liittyvät käsitteet ja yksikönmuunnokset opetellaan ulkoa ymmärtämättä niiden todellista merkitystä. Opettajien kokevat mittaamisen periaatteen ymmärtämisen, oppilaiden omakohtaisten kokemusten ja konkreettisten opetusmenetelmien lisäävän mielekkyyttä ja motivaatiota oppimiseen sekä vahvistavan monipuolisesti oppilaiden omaa ajattelua ja käsitteenmuodostumista.

Asiasanat/Keywords varhaiset matemaattiset taidot, kymmenjärjestelmä, mittaaminen, mittayksiköiden muunnokset, matematiikan oppiminen

OULUN YLIOPISTO
UNIVERSITY of OULU

Kasvatustieteiden tiedekunta
Faculty of Education

Tiivistelmä opinnäytetyöstä
Thesis abstract

Degree Programme in Primary Teacher Education		Tekijä/Author Tytti Tuulikki Nissilä	
Työn nimi/Title of thesis Mastery of the decimal system and measurement unit conversion in the sixth grade of comprehensive school			
Pääaine/Major subject Education	Työn laji/Type of thesis Master's thesis	Aika/Year April 2017	Sivumäärä/No. of pages 104+9

Tiivistelmä/Abstract

This Master's thesis studies the mastery of the decimal system and conversion of measurement units among sixth-grade comprehensive school students. The sample consisted of 75 students and four teachers in a school in Northern Ostrobothnia. The research data was collected early in the spring of 2016. The research method used was a mixed methods approach combining quantitative and qualitative research. The quantitative data was built on an examination of the results based on three instruments (Decimal Survey 2, Measurement Unit Survey 1, Measurement Unit Survey 2) in the students' mastery of the decimal system and measurement unit conversion. The results acquired in the survey were tabulated and analyzed by statistical methods. The qualitative data, consisting of interviews with four teachers, lends itself to phenomenological research and was analyzed using a method adapted by Perttula, in which more multidimensional perspectives on the mastery of the decimal system and measurement unit conversion were sought by means of the teachers' experiences and the meanings resulting from these experiences.

The theoretical framework discusses the meaning of early mathematical skills underlying the mastery of the decimal system, and the development of decimal system skills as part of understanding the concept of place value and the principle of the decimal system. The basic starting points for teaching the decimal system are introduced in view of the basic education curriculum and previous research results. The theoretical section describes the structure of the measurement unit system as a part of the development of the concept of measuring and mastery of measurement unit conversion. It also deals with the challenges observed in the mastery of measuring and measurement unit conversion, and considers the basic principles connected with teaching and opportunities introduced by teaching practices.

The research results showed that some of the pupils had severe deficiencies in their mastery of the decimal system. The results also confirmed the hierarchical nature of mathematics, whereby new skills are based on previous skills. The results showed that knowing the decimal system has a strong connection with the mastery of measurement unit conversion. It is challenging for the students to understand the concept of measuring and the ratios between different units. They learn the concepts connected with measuring and unit conversions by rote without understanding their true meaning. The teachers feel that understanding the principle of measuring, the students' own personal experiences and concrete teaching methods add to meaningful and motivated learning, and reinforce in a variety of ways the students' own thinking and concept formation.

Asiasanat/Keywords early mathematical skills, decimal system, measuring, measurement unit conversions, mathematics learning

Sisällys

1 JOHDANTO 1

2 MATEMAATTISTEN TAITOJEN KEHITTYMINEN KYMMENJÄRJESTELMÄN OPPIMISEN TAUSTALLA 4

2.1 Matemaattisten taitojen kehitys 4

2.2 Keskeiset matemaattiset taitoalueet 6

3 KYMMENJÄRJESTELMÄN OPPIMISEN JA OPETTAMISEN PERUSLÄHTÖKOHTIA 10

3.1 Kymmenjärjestelmätaitojen kehitys 10

3.2 Kymmenjärjestelmän oppimisen merkitys 12

3.3 Kymmenjärjestelmän opettamisen lähtökohtia 13

4 MITTAAMISESTA MITTAYKSIKÖIDEN MUUNNOKSIIN ALAKOULUN MATEMATIIKAN OPETUKSESSA 16

4.1 Mittayksikköjärjestelmän syntyminen ja sen rakenne 17

4.2 Mittaamisen käsitteen ymmärtäminen 20

4.3 Mittaamisen taitojen kehittyminen 23

4.4 Mittaamisen ja mittayksiköiden muunnosten oppimisen haasteet 24

4.5 Mittaamisen ja mittayksiköiden muunnosten opettamisen peruslähtökohtia 28

4.5.1 Mittaaminen ja mittayksiköiden muunnokset alakoulun opetussuunnitelmassa sekä oppikirjojen merkitys opetuksessa 30

5 TUTKIMUKSEN TARKOITUS JA METODOLOGIA 32

5.1 Tutkimuksen tarkoitus ja tutkimustehtävä 32

5.2 Tutkimuksen metodologiset lähtökohdat 33

5.2.1 Tutkimuksen lähestymistapa 33

5.2.2 Tutkijan esiymmärrys ja sulkeistaminen 36

5.3 Tutkimusaineisto ja sen kerääminen 39

5.3.1 Tutkimusjoukko 39

5.3.2 Määrällinen aineisto ja mittarit 40

5.3.3 Laadullinen aineisto ja fenomenologinen tutkimushaastattelu 41

6 TUTKIMUKSEN ANALYYSI JA TULOKSET 44

6.1 Määrällisen tutkimusaineiston analyysi ja tulokset 44

6.1.1 Määrällisen aineiston analysointi 44

6.1.2 Määrällisen tutkimuksen tulokset 44

6.2 Yhteenveto määrällisen aineiston tuloksista 56

6.3 Laadullisen tutkimusaineiston analyysi ja tulokset 57

6.3.1 Yksilökohtaisen merkitysverkoston muodostaminen ... 59
6.3.2 Yleisen merkitysverkoston muodostaminen ... 64
6.4 Yhteenveto laadullisen tutkimuksen tuloksista ... 70

7 JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA ... 78

7.1 Johtopäätökset ... 78
7.1.1 Kymmenjärjestelmän hallinta ja opettajien kokemukset oppilaiden kymmenjärjestelmän hallinnasta ... 78
7.1.2 Mittayksiköiden muunnosten hallinta ja opettajien kokemukset oppilaiden mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. ... 83
7.2 Tutkimuksen eettiset näkökulmat ... 86
7.3 Tutkimuksen luotettavuuden arviointia ... 87
7.4 Pohdinta ja jatkotutkimusmahdollisuudet ... 91

Lähteet ... 95

Liitteet

1 JOHDANTO

Pro gradu -tutkimukseni aiheen valintaan ovat vaikuttaneet aikaisemmat matematiikan oppimiskokemukseni kouluajoilta ja myöhemmät kokemukseni matematiikan opettamisesta. Omat kokemukseni kouluajan matematiikasta ovat osoittautuneet hyvin ristiriitaiseksi. Minulle koulumatematiikka on näyttäytynyt työläänä ja yksinäisenä puurtamisena sekä harvemmin myös käytännöllisenä tekemisenä. Epävarmuuden, sääntöjen ja rutiininomaisten työskentelytapojen vallitessa, en koskaan kokenut ymmärtäväni syvällisesti tärkeitä matemaattisia käsitteitä tai niiden merkityksiä. Vasta aikuisena aloittaessani kasvatustieteen opintojani, heräsi kiinnostukseni matematiikan oppimista kohtaan. Havahduin, että matematiikkaa voi oppia myös ymmärtäen ja samalla tajusin, mistä matematiikassa ylipäätään on kyse. Opiskellessani Jyväskylässä erityispedagogiikkaa ja kohdatessani oppilaita, joilla oli ollut matematiikassa oppimisvaikeuksia, aloin reflektoida myös omia kouluaikaisia oppimiskokemuksiani. Erityisopettajaksi pätevöitymisen yhteydessä tutustuin muun muassa unkarilaiseen Varga Neményi -menetelmään ja pian myös oivalsin kymmenjärjestelmän osaamisen merkityksen lukujen ja laskutaitojen havainnollistajana. Kymmenjärjestelmän merkityksen ymmärtäminen koko matemaattisen osaamisen perustana ovat ohjanneet omaa esiymmärrystäni ja etukäteisoletuksiani aloittaessani tutkimustyötä.

Minulle tarjoutui mahdollisuus lähteä tekemään tutkimuksellista yhteistyötä pitkään matematiikan erityisopettajana ja kouluttajana työskennelleen ja matematiikan oppimisvaikeuksia tutkineen sekä lukuisia oppi- ja arviointimateriaaleja julkaisseen Hannele Ikäheimon kanssa. Jo yhteistyömme alkumetreillä minulla heräsi mielenkiinto myös mitan käsitteen ja mittaamistaitojen tutkimiseen. Pro gradu -tutkimuksen aiheeksi täsmentyi kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten osaamisen tarkastelu peruskoulun kuudennen luokan oppilailla. Suomalaislasten matematiikan osaamisessa ja asenteissa oppiainetta kohtaan on tapahtunut selvää heikkenemistä. Viimeisimmässä vuoden 2015 TIMSS-tutkimuksista paljastuu, että matematiikan taidot myös peruslaskutaitojen osalta ovat selvässä laskussa (Vettenranta, Hiltunen, Nissinen, Puhakka & Rautopuro 2016 5–32). PISA -tutkimukset ovat antaneet myös selkeitä viitteitä samanlaisesta matemaattisten taitojen heikkenemisestä (Välijärvi & Kupari 2015).

Erään tutkimukseen osallistuneen opettajan lausahdus ”*Ei oo sillee aateltu ku lisätään vaan nollia perään eikä siirretä pilkkua”* kiteyttää kuvainnollisesti mittayksiköiden muunnosten

oppimiseen liittyvät hankaluudet, sillä ne opitaan usein hyvin pinnallisesti ymmärtämättä niiden todellista käyttötarkoitusta ja käsitteellistä perustaa. Kansainvälisellä tasolla oppilaiden mittaamistaidoissa on havaittu huomattavia haasteita. (Hiebert 1984; Kloosterman, Rutledge & Kenney 2009.) Lukukäsitteen, lukujen ja laskutoimitusten, mittaamisen käsitteen sekä kymmenjärjestelmään pohjautuvan mittayksikköjärjestelmän rakenteen käsitteellinen ymmärtäminen tuottaa monelle oppilaalle hankaluuksia (Ikäheimo 2011, 8; Ikäheimo 2012, 6; Korhonen 2013, 38–40). Vastauksena näihin haasteisiin tämä tutkimus osuu erittäin merkittävään ajankohtaan ja antaa erityisen syyn pureutua näiden keskeisten matemaattisten taitojen tarkasteluun.

Tutkimuksessa selvitetään peruskoulun kuudennen luokan oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Tutkimusaineisto koostuu sekä määrällisen että laadullisen aineiston tarkastelusta. Määrällinen aineisto rakentuu kolmen Hannele Ikäheimon kehittelemien mittarien (Kymppi-kartoitus 2, Mittayksikkö-kartoitus 1, Mittayksikkö-kartoitus 2) (Ikäheimo 2015a ja 2016) tulosten tarkastelemiseen, joiden avulla selvitetään yhden koulun kuudennen luokan oppilaiden (N=75) kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Tutkimuksen laadullinen aineisto koostuu tutkimukseen osallistuvien oppilaiden neljän opettajan haastattelusta. Tutkimuksessa tavoitellaan opettajien subjektiivisten kokemusten ja kokemuksista muodostuneiden merkitysten avulla syvällisempiä ja moniulotteisempia näkökulmia oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta niin, että molempien aineistojen antamat tulokset toimivat toisiaan täydentävinä tulkintoina.

Tutkimusmatkani on ollut pitkä prosessi, joka on vaatinut äärimmäisen pitkäjänteistä ja kokonaisvaltaista perehtymistä työhön. Olen ollut erittäin kiitollinen ja onnekas monipuolisesta ja asiantuntevasta ohjauksesta koko tutkimusprosessin ajan. Ensimmäiseksi esitän lämpimät kiitokseni Hannele Ikäheimolle kaikista niistä arvokkaista neuvoista, parannus- ja kehittämisohjeista sekä tutkimukseen liittyvien mittarien kehittelyideoista, jotka ovat olleet korvaamattomana apuna koko tutkimuksen ajan alusta loppuun saakka. Suuret kiitokset kuuluvat myös Kokkolan Chydeniuksen yliopistolehtorille Päivi Perkkilälle ansiokkaasta palautteesta, osaamisesta ja kannustuksesta tutkimustyötäni kohtaan. Haluan kiittää myös kaikkia Oulun yliopiston opettajankoulutuslaitoksessa työskenteleviä, jotka omalta osaltaan edistivät tutkimustani eteenpäin. Erityinen kiitos kuuluu gradua ohjanneelle Marko Kieliselle. Lausun kiitokseni myös tutkimukseen osallistuneen koulun opettajille, rehtorille, oppilaille

ja heidän vanhemmille. Tutkimus ei olisi onnistunut ilman laadulliseen tutkimukseen osallistuvien neljän opettajan antamaa arvokasta haastatteluaineistoa, joka kaikessa merkityksellisyydessään on avartanut omia näkemyksiäni, mutta luonut myös uskoa tutkimustyöni tärkeydelle.

Luvussa 2 perehdytään kymmenjärjestelmän taustalla vaikuttavien keskeisten matemaattisten taitojen tarkasteluun. Luvussa 3 pureudutaan kymmenjärjestelmän oppimisen ja opettamisen lähtökohtiin keskittyen kymmenjärjestelmätaitoja tukeviin periaatteisiin, sen oppimisen merkitykseen ja opettamisen lähtökohtiin. Luvussa 4 keskitytään mittaamisen käsitteen ja mittayksiköiden muunnosten oppimisen sekä opettamisen peruslähtökohtiin huomioiden aina mittaamisen historian merkitys, oppimisessa esiintyvät haasteet ja oppikirjojen merkitys oppimisprosessissa. Esittelen tutkimuskysymykset, tutkimuksen metodologiset lähtökohdat ja molemmat tutkimusaineistot luvussa 5. Kuvaan luvussa 6 tutkimusaineistojen analyysin ja saadut tulokset. Luvussa 7 kokoan yhteen määrällisestä ja laadullisesta tutkimusaineistosta tehdyt johtopäätökset niin, että ne edustavat toisiaan täydentävinä elementteinä. Lisäksi tarkastelen luvussa tutkimuksen eettisiä näkökulmia, arvioin tutkimuksen luotettavuutta fenomenologisen tutkimusperinteen mukaisesti ja pohdin tutkimuksen merkityksellisyyttä sekä jatkotutkimusmahdollisuuksia.

2 MATEMAATTISTEN TAITOJEN KEHITTYMINEN KYMMENJÄRJESTELMÄN OPPIMISEN TAUSTALLA

Lukujen ymmärtäminen ja lukujen käsittelemisen kehitys tapahtuvat asteittain ja kehityskulku on usein hyvin yksilöllinen. Matemaattisten taitojen kehitys alkaa kuitenkin jo hyvin varhaisessa vaiheessa ja osa taidoista on jopa synnynnäisiä, jotka kehittyvät lapselle tavanomaisissa ja luonnollisissa tilanteissa. (Aunio, Hannula & Räsänen 2004, 198–199.) Tutkimuksellisesti varmaksi todettua on se, että matemaattisen ajattelun ja taitojen kehittyminen tarvitsevat runsaasti harjoitusta. Lukumäärien kanssa puuhailu vaikuttavat vahvemmin lukujenkäsittelytaidon kehittymiseen kuin ”peritty matematiikkapää”. Matemaattisten taitojen ja lukukäsitteen eri komponenttien hiearkkisuus asettuu aikaisempien tietojen ja taitojen varaan. (Hannula & Lepola 2006, 131–132.)

Seuraavissa kappaleissa tutustutaan kymmenjärjestelmän oppimisen taustalla vaikuttaviin tekijöihin esittäen tutkimustulosten valossa keskeisiä matemaattisten taitojen kehitystä kuvaavia piirteitä ja taitoalueita sekä matemaattisen tiedon kahtiajaon merkitystä matematiikan käsitteelliseen oppimisen taustalla.

2.1 Matemaattisten taitojen kehitys

Perusopetuksen aikana oppilaan on omaksuttava lukemattomia uusia taitoja ja tietoja, jotka auttavat selviytymään elämässä eteenpäin. Ymmärrys oppilaan matemaattisen perustan rakentumisesta sekä matemaattisten taitojen kehittymisestä auttavat opettajaa tunnistamaan ja arvioimaan matematiikan oppimisprosessin muotoutumista. Sujuvan peruslaskutaidon saavuttaminen ensimmäisien kouluvuosien aikana on keskeinen tavoite myöhempien matemaattisten taitojen kannalta (Aunio & Räsänen 2016, 684–685, 698). Peruslaskutaidoilla on tärkeä rooli niin matematiikan oppimisessa koulussa kuin arjessa selviytymisessä (Räsänen 2012, 1168). Matemaattisilla valmiuksilla on valtava merkitys jo esi- ja alkuopetuksessa, sillä kymmenjärjestelmää ei ole helppo oppia, jos valmiudet ovat puutteelliset (Ikäheimo 2012, 6).

Matemaattinen ajattelu on hyvin perustavanlaatuinen kognitiivinen taito (Clements & Sarama 2011, 968). Matemaattisten taitojen kehitys alkaa hyvin varhain ennen kouluikää ja varhaisilla matemaattisilla taidoilla on tutkitusti merkittävä vaikutus myöhempien matemaattisten taitojen kehitykseen (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004, 699; Jordan,

Kaplan, Ramineni & Locuniak 2009, 864). Sujuvan lukujonon luettelemisen taidot eli liikkuminen lukujonossa eteen- ja taaksepäin ovat kehityksellisesti tärkeitä, sillä lukujonotaidot ennustavat hyvin laskutaitoja ja kymmenjärjestelmän osaamista (Koponen 2013, 14; Hannula & Lepola 2006, 142, 149). Myös ero spontaanin huomion kiinnittämisessä lukumääriin on yhteydessä lasku- ja lukujonotaitojen kehitykseen (Hannula, Räsänen & Lehtinen 2007, 51). Yksilölliset erot ovat merkittäviä, sillä jo alle kouluikäisten lasten välillä on erilaiset taipumukset lukumäärien havaitsemisessa (Hannula & Lehtinen 2005, 237). Hannula & Lepola (2006, 15) peräänkuuluttavatkin huomion kiinnittämistä jo ennen kouluikää yhtä lailla matemaattisiin valmiuksiin kuin kielellisiinkin valmiuksiin. Matemaattiset taidot monipuolistuvat kielenkehityksen myötä ja sanavaraston kehittyminen mahdollistaa ymmärryksen matemaattisista käsitteistä (Räsänen 2012, 1173).

Karen Fuson (1988, 1992) on määritellyt tärkeät varhaislapsuudessa muotoutuneet kehitykselliset vaiheet, jotka ovat koko laskutaidon ja lukukäsitteen kehittymisen taustalla. Lapsi oppii luettelemaan lukusanoja (yksi, kaksi, kolme jne.), numerosymboleja (1, 2, 3 jne.) ja ymmärtää lukujonon avulla esineen ja lukusanan välisen yksi-yhteen-vastaavuuden (aloittaa aluksi lukujonon laskemisen alusta). Tämän jälkeen lapselle kehittyy taito käyttää lukujonoa karttuvan määrän laskemiseen pystyen jatkamaan lukujen luettelua mistä tahansa lukujonon luvusta. Lapsen ymmärtäessä, että lukujono on suuruusjärjestyksessä olevien lukujen jono, kehittyvät myös kymmenjärjestelmän pohjalla olevan lukujen rakentumisen säännöt. Koulumatematiikan kannalta keskeinen kehitysvaihe on, kun lapsi ymmärtää lukujonon lukumäärien jonona. Osittamalla ja kokoamalla lukumääriä avautuu mahdollisuus tehokkaille yhteen- ja vähennyslaskujen strategioiden käyttöönotolle. (Clements 2004, 15–29; Kinnunen 2003, 1–6.)

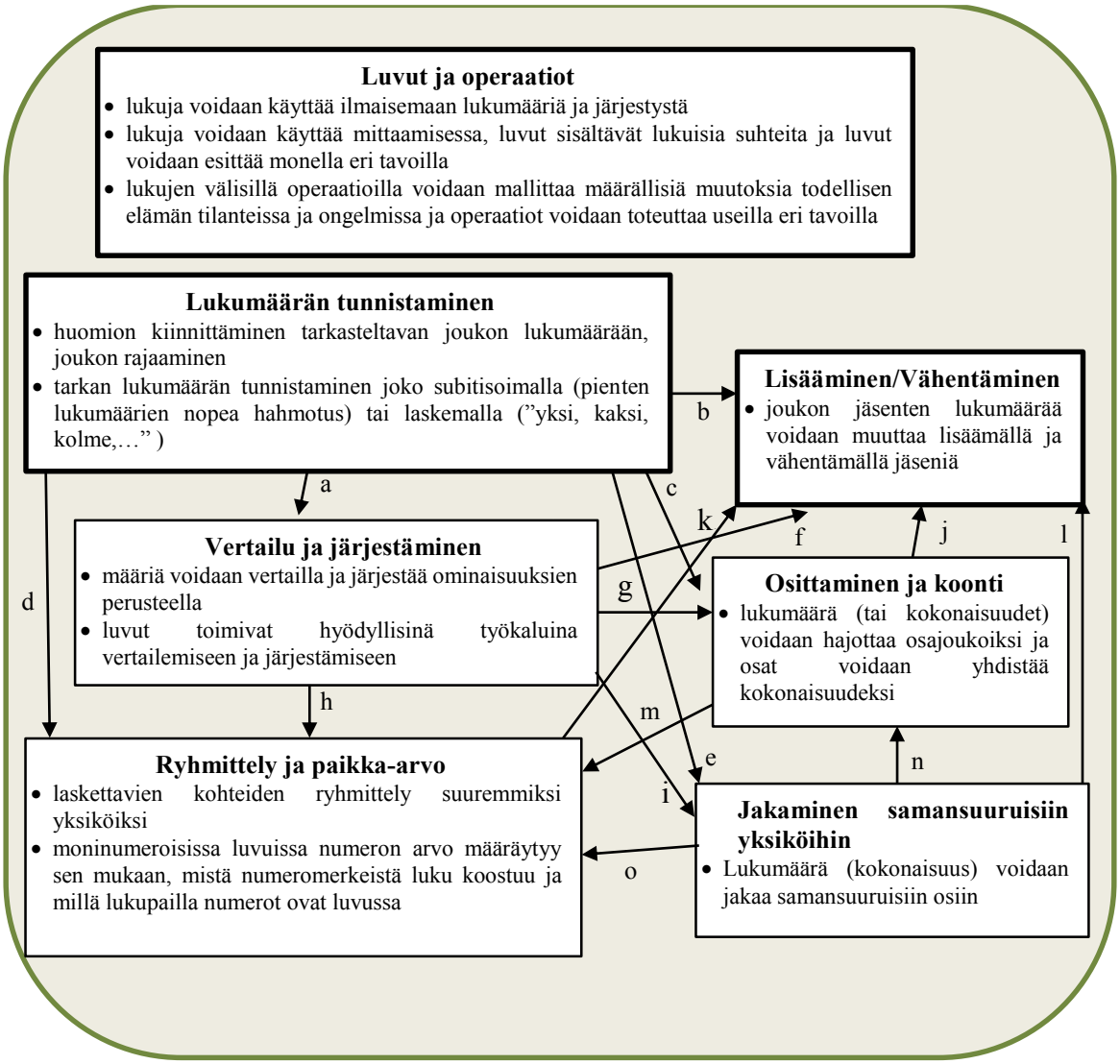
Kansainvälisissä ja suomalaisissa tutkimuksissa on todettu varhaisen matemaattisen osaamisen ennustavan vahvasti tulevaa koulumatematiikan osaamista. Koulun aloittavien lasten välillä on todettu olevan huomattavia eroja erityisesti lukujonon luettelemisen taidoissa, laskemisen taidoissa ja aritmeettisissa perustaidoissa. (Mononen & Aunio 2013, 256.) Aunola ym. (2004) ja Jordan, Kaplan & Hanich (2002) tutkimuksissa todetaan, että lapsilla, joilla on 5–6-vuotiaana heikot matemaattiset taidot, on todennäköisesti vaikeuksia matematiikassa myös koulussa. Samat tutkimukset ovat myös osoittaneet, että ero hyvin matematiikkaa osaavien ja heikosti matematiikkaa osaavien lasten välillä vain kasvaa luokka-asteelta toiselle siirryttäessä. (Jordan ym. 2002, 589–595; Aunio 2008, 63). On myös tutkimuksia,

joissa on havaittu, että hyvät taidot matematiikassa ovat yhteydessä koulutus- ja työllistymismahdollisuuksiin (Hannula & Lepola 2006, 129; Räsänen 2012, 1168).

2.2 Keskeiset matemaattiset taitoalueet

Koska matemaattisten taitojen eri osa-alueilla on huomattava merkitys myös kymmenjärjestelmän oppimiseen, koen tärkeäksi avata ensin keskeisiä esi- ja alkuopetusikäisten taitoalueita, lukumääriin liittyvää peruskäsitteistöä ja niiden hierakkista muotoutumista ennen siirtymistä kymmenjärjestelmän periaatteiden avaamiseen sekä luonnollisten- että desimaalilukujen osalta. Alkuopetuksen matematiikka kohdistuu pääosin aritmeettisiin taitoihin ja luonnollisten lukujen lukujärjestelmän periaatteiden ymmärtämiseen (Hannula & Lepola 2006, 133).

Matemaattisten taitojen kehityksestä on esitelty useita erilaisia malleja, joiden kautta voidaan jäsentää lukumääriin ja aritmeettisiin operaatioihin liittyvää kehitystä sekä kymmenjärjestelmän kehittymistä pohjustavia tekijöitä. Esi- ja alkuopetusikäisten lukuihin ja numeroihin liittyvää käsitteistöä ja taitojen kehitystä on kuvattu seuraavan kuvion 1 avulla. Hannula & Lepola (2006, 135) ovat mukailleet kuviossa Clementsiä (2004), Baroodya (2004), Fusonia (1988, 2004) ja Hannulaa (2005).



Kuvio 1. Matemaattisten taitojen peruskäsitteistö ja taitojen kehitys esi- ja alkuopetusikäisillä lapsilla

Nuolet a, b, c, jne. kuvaavat taitojen liittymistä toisiinsa seuraavasti:

(a) lapsi tunnistaa esineiden lukumäärän ja käyttää taitoa joukkojen vertailuun ja järjestämiseen,

(b) lapsi oppii käyttämään luettelemalla laskemista avuksi summia ja erotuksia laskiessa, esimerkiksi 5 + 2 laskun lapsi luettelee ”viisi, kuusi, seitsemän”,

(c) lapsi oppii hajottamaan lukuja, esimerkiksi 6 = 5 + 1 tai 4 + 2 jne.,

(d) lapsi oppii ryhmittelemään esinejoukkoa suuremmiksi laskettaviksi osajoukoiksi, esimerkiksi kymmenen napin kasoiksi, jotka voidaan laskea kymmenten joukkoina yhteen. Taito pohjustaa paikka-arvon ymmärtämistä,

(e) lapsi oppii tarkistamaan laskemalla, että kaikissa osajoukoissa on laskemisen jälkeen yhtä monta jäsentä,
(f) lapsi ymmärtää lukumääräisyyteen liittyviä käsitteitä ”enemmän, vähemmän ja yhtä monta” sekä lukumäärän säilymiseen liittyvän periaatteen.
(g) lapsi ymmärtää, että käsitteet ”enemmän, vähemmän ja yhtä monta” muodostuvat kokonaisuudesta, jossa osat ovat pienempiä kuin kokonaisuus ja osien summasta muodostuu kokonaisuus,
(h) lapsi ymmärtää käsitteiden ”enemmän, vähemmän ja yhtä monta” liittyvän lukujen välisten suhteiden ymmärtämiseen, esimerkiksi 35 < 36, ja luku 34 voidaan ilmaista 34 ykköstä = 3 kymmentä + 4 ykköstä = 2 kymmentä ja 14 ykköstä,
(i) lapsi ymmärtää, että lukumäärä (kokonaisuus) voidaan jakaa samansuuruisiin osiin ja yhdistää osat uudelleen kokonaisuuksiksi. Tämä taito kehittyy vertailu- ja järjestysominaisuuksien perustalle,
(j) lapsi oivaltaa osa-kokonainen-suhteiden periaatteen käyttäen hyväksi sitä yhteen- ja vähennyslaskuissa, esimerkiksi yhteenlaskun vaihdannaisuus (osa A + osa B = osa B + osa A) ja vähentämisen ja lisäämisen toisiaan täydentävinä (kokonainen – osa A = osa B, osa A + osa B = kokonainen),
(k) lapsi oppii käyttämään ryhmittelyn ja paikka-arvon käsitteitä hyväksi, joka avaa mahdollisuuksia tehokkaammille yhteen- ja vähennyslaskustrategioille,
(l) lapsi oivaltaa, että saman suuruisten lukujen yhteenlaskulla ja saman suuruisten yksiköiden jakamisen välillä on yhteys, esimerkiksi 3 + 3 = 6,
(m) lapsi ymmärtää osa-kokonainen-suhteita ja käsittää moninumeroisten lukujen arvot niin, ykkösten ja kymmenten täytyy tuottaa tulokseksi saman luvun kuin mitä luku oli ennen ykkösiksi ja kymmeniksi hajottamista, esimerkiksi 36 = 3 kymmentä + 6 ykköstä,
(n) lapsi oivaltaa, että jako saman suuruisiin yksiköihin on vain yksi osittamisen ja koonnin erityistapaus,
(o) lapsi ymmärtää, että isompi yksikkö voidaan jakaa pienemmiksi ja keskenään yhtäsuuriksi yksiköiksi, esimerkiksi kymmenen voidaan jakaa kymmeneksi ykköseksi jne. Tämä taito pohjustaa kymmenjärjestelmän rakenteen ymmärtämistä.
(Hannula & Lepola 2006, 135–137.)

Koska matemaattisten taitojen kehittymisellä on hierarkkinen luonne ja osataidot rakentuvat aikaisempien taitojen ja tietojen varaan, lapset tarvitsevat vahvan matemaattisen taitopohjan

jo hyvin varhain. Esikouluikäisten lasten matemaattiset taidot ennustavat hyvin heidän myöhempää matemaattisten taitojen kehitystä. (Clements & Sarama, 2011, 968; Hannula & Lepola 2006, 131.) Taitojen kehittymiselle on ominaista aikaisemmin opittujen taitojen vähittäinen automatisoituminen harjoittelun myötä (Fuson 1988, 3–4; Hannula & Lepola 2006, 131). Tämän vuoksi on erityisen tärkeää tunnistaa varhain mahdolliset matemaattiset oppimisvaikeudet tai puutteet matematiikan taidoissa ja kohdentaa tuki juuri niihin osataitoihin, joissa puutteita esiintyy (Koponen 2013, 9). Ikäheimon ja Riskun (2004, 239) mukaan matematiikan osaamista voidaan verrata talon rakentamiseen niin, että perustukset tulee rakentaa vankaksi myöhempää oppimista varten. Perustan rakentaminen vaatii riittävän vahvan, monipuolisen harjoittelun ja konkreettisten keinojen tuottamaa ymmärrystä luvuista, lukujonosta ja kymmenjärjestelmästä (Hannula & Lepola 2006, 149; Ikäheimo & Risku 2004, 239).

Matemaattinen tieto voidaan jakaa kahteen eri osa-alueeseen: proseduraaliseen tietoon (*procedural knowledge*) ja konseptuaaliseen tietoon (*conceptual knowledge*). Proseduraalisella tiedolla eli menetelmätiedolla tarkoitetaan taitoa käyttää ja soveltaa erilaisia sääntöjä, operaatioita ja algoritmeja tietyn ongelman ratkaisemisessa. Konseptuaalinen eli käsitetieto puolestaan tarkoittaa kykyä ymmärtää käsitteitä ja niiden periaatteita sekä taitoa soveltaa niitä eri asiayhteyksissä. Matematiikan syvällinen ymmärtäminen vaatii siis molempien sekä menetelmätiedon että käsitetiedon luonnollista nivoutumista yhteen. Ongelmana on, että oppilaat saattavat osata mekaanisesti laskea erilaisia laskutoimituksia ymmärtämättä kuitenkaan, mistä laskuissa oikeastaan onkaan kysymys. (Hiebert & Lefevre 1986, 1–9). Silfverbergin (1999, 65–66) mukaan useat matemaattiset laskutoimitukset ovat opittavissa ilman, että on ymmärrystä niiden käsitteellisistä komponenteista. Lauritzenin (2012) tutkimuksissa ilmeni, että koulumatematiikassa oppilaiden proseduraalinen osaaminen on kehittynyt vahvemmaksi konseptuaalisen tiedon jäädessä vaatimattomaksi. Tutkimukset kuitenkin osoittavat, että molempien tietorakenteiden ymmärtäminen on välttämätöntä kehittyneen matemaattisen taidon syntymiseen. Proseduureja on mahdollista oppia ulkoa ja oppilaasta voi kehittyä taitavakin mekaaninen laskija, mutta ilman käsitetiedon sisäistämistä oppiminen jää matalalle abstraktitasolle. (Lauritzen 2012, 127.)

3 KYMMENJÄRJESTELMÄN OPPIMISEN JA OPETTAMISEN PERUSLÄHTÖKOHTIA

Kymmenjärjestelmän oppimisen lähtökohdat ovat riippuvaisia varhaisten matemaattisten taitojen kehittymisen ja lukujärjestelmän rakenteen omaksumisen periaatteille. Kymmenjärjestelmän omaksuminen antaa vahvan pohjan desimaalilukujen, prosenttilaskujen ja mittaamisen käsitteen ymmärtämiseen. (Van de Walle, Karp & Bay-Williams 2014, 204.) Kymmenjärjestelmän hallinnan katsotaan olevan olennainen osa matematiikan opettamista, oppimista ja osaamista, sillä sen kautta kumpuaa ymmärrystä niin laskutoimituksiin kuin mittayksiköiden muunnoksiin rakentaen taidoista sujuvampia ja pysyvämpiä (Ikäheimo 2012, 3). Seuraavissa kappaleissa käsittelen kymmenjärjestelmätaitojen kehitystä osana paikka-arvokäsitteen ymmärtämistä ja kymmenjärjestelmän periaatteen oppimista sekä oppimisen merkitystä ja sen taustalla vaikuttavia tekijöitä. Kappaleen lopussa esitän perusopetuksen opetussuunnitelman luonnehdinnan ja tutkimustulosten näkökulmien avulla, mitkä kymmenjärjestelmän opetuksessa havaitut aspektit lisäävät matematiikan käsitteellistä oppimista ja merkityksellisyyttä oppimisprosessissa.

3.1 Kymmenjärjestelmätaitojen kehitys

Sujuvan peruslaskutaidon lisäksi keskeisenä merkittävänä taitoalueena on lukujärjestelmän hallinta, joka meillä Suomessa on kymmenjärjestelmä. Kymmenjärjestelmä koostuu kymmenestä numeromerkistä: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Numerot muodostavat lukuja. Lukukäsitteeseen kuuluu kolme osa-aluetta, kuten lukumäärä, lukusana ja numero (merkki), joiden erottaminen on olennaista lukujärjestelmän oppimisen kannalta (Ikäheimo 2012, 8–9). Kymmenjärjestelmässä on kyse paikkajärjestelmästä, jossa numeron arvo määräytyy sen ilmaiseman yksikön mukaan (Hannula & Lepola 2006, 135). Kantalukuna on siis kymmenen, jonka potenssiin saavuttaessa siirrytään aina seuraavaksi suurempaan yksikköön. Yksittäisen numeron suuruuden lisäksi on myös merkittävä paikka luvun kirjoitusasussa. Paikkajärjestelmälle on ominaista, että jokaista paikkaa varten tarvitaan merkitsemään joku merkki. Vaikka lukupaikalla ei olisikaan yhtään yksikköä, merkitsemme sen luonnollisten lukujen osalta nollalla. (Karttunen 2006, 20–22; Luoma-aho 2010, 7–15.)

Kymmenjärjestelmän oppimisessa keskeisiä periaatteita ovat paikka-arvon ymmärtäminen, ryhmittely ja vaihtaminen, konkreettisten materiaalien ja lukusanojen yhdistäminen nume-

rosymboleihin sekä nollan ilmaiseman tyhjän lukuyksikön oivaltaminen (Haylock & Cockburn 2008, 12; Lawton 2014, 23). Lapsen tulee oivaltaa paikka-arvon periaate niin, että luvun arvo riippuu siitä, mistä numeromerkeistä luku koostuu ja millä lukupaikalla numerot ovat luvussa (Clements 2004, 23–24; Hannula & Lepola 2006, 135). Lapsen edetessä laskutaitojen harjoittelussa, hän alkaa käyttää suurempia lukuja kuin yhdeksän. Lapsen tulee oivaltaa, että luonnollisten lukujen alueella luvun suuruus määräytyy kymmenjärjestelmän lukupaikan mukaan, esimerkiksi onko numero ykkösten, kymmenten, satojen vai tuhansien paikalla. Esimerkiksi luonnollisessa luvussa 1345 numero 1 ilmoittaa tuhansien määrän, numero 3 satojen määrän, numero 4 kymmenien määrän ja numero 5 ykkösten määrän. (Ikäheimo 2012, 9, 12, 24; Ikäheimo, Aalto & Puumalainen 2000, 15.)

Desimaaliluvuissa luvun suuruus määräytyy desimaaliosien mukaan, esimerkiksi onko numero kymmenesosien, sadasosien vai tuhannesosien paikalla. Oppilaiden on oleellista ymmärtää, että desimaaliluvussa aina kukin yksikkö on kymmenen kertaa seuraavaa pienempi yksikkö, olipa yksikköjen paikkojen välissä pilkkua tai ei. Lisäksi desimaalipilkku erottaa kokonaisluvut ja desimaaliosat toisistaan. Esimerkiksi desimaaliluvussa 2,145 numero 2 ilmoittaa kokonaiset, numero 1 kymmenesosat, numero 4 sadasosat ja numero 5 tuhannesosat. (Malaty 2003, 28–29.) Desimaalilukujen paikkajärjestelmän ymmärtäminen edellyttää käsitystä luonnollisten lukujen paikkajärjestelmästä. Desimaalilukujen käsitteen oppimisen ehtona on siis, että oppilas on ymmärtänyt kymmenjärjestelmän käsitteen luonnollisten lukujen osalta. (Van de Walle ym. 2014, 360–361.)

Vaihtamisen ja ryhmittelyn periaate tarkoittaa laskettavien kohteiden ryhmittelyä suuremmiksi lukuyksiköiksi. Kymmenen kappaletta pienempää lukuyksikköä voidaan vaihtaa yhteen isompaan lukuyksikköön tai päinvastoin yksi kappale isompaa lukuyksikköä voidaan vaihtaa kymmeneen pienempään lukuyksikköön. (Van de Walle ym. 2014, 205; Haylock & Cockburn 2008, 12; ks. myös Ikäheimo 2012, 21–22.) Lukusanojen yhdistämisellä numerosymboleihin on suuri merkitys, koska puhutun ja kirjoitetun kielen yhteys ei ole niin suoraviivaista. Esimerkiksi kirjoitettuna luku 268 sanotaan ”kaksisataakuusikymmentäkahdeksan”. Jos oppilas ei tunne luvun paikka-arvoa ja sen merkitystä, hän saattaa kirjoittaa esimerkiksi 20068, koska ”sataa” ja ”kymmentä eivät näy varsinaisesti kirjoitetussa luvussa. (Haylock & Cockburn 2008, 14). Oppilaan tulee ymmärtää, että nolla ilmaisee tyhjän lukuyksikön paikan. Tämä aiheuttaa usein ongelmia ja kertoo kymmenjärjestelmän sekä paikka-arvon käsitteen ymmärtämisen haasteista. Esimerkiksi jos oppilasta pyydetään kirjoittamaan luku tuhat viisikymmentäkolme, hän saattaa kirjoittaa 153. Näin oppilas ei ole ymmärtänyt,

että satojen puuttuessa tulee luvun paikalle kirjoittaa 0, koska muuten tuhannet eivät ole myöskään oikealla lukupaikalla. Vastaavasti desimaaliluvuissa kymmenjärjestelmän ymmärtämisen puutteesta kertoo, jos oppilaan mukaan luku 0,5 on pienempi kuin 0,500. (Lawton 2014, 28–30, 102.)

Wright, Martland ja Stafford (2006) määrittelivät tutkimuksessaan kolme tasoa lasten kymmenjärjestelmän laskustrategioiden kehittymiseen koskien kaksinumeroisia lukuja. Ensimmäisellä tasolla lapsi kykenee erottamaan vain yksittäisiä ykkösiä, eikä osaa ajatella kymmentä vielä kokonaisuutena. Yhteen- ja vähennyslaskuissa tämä tarkoittaa yhden lisäämistä tai vähentämistä aina yhden ykkösen kerrallaan. Toisella tasolla lapsi on jo ymmärtänyt, että kymmenen kokonaisuus on muodostunut kymmenestä ykkösestä, jolloin hän kykenee laskemaan kaksinumeroisilla luvuilla konkreettisia apuvälineitä käyttäen. Kolmannella tasolla lapsi kykenee jo ratkaisemaan laskutoimitukset ilman välineitä mielessään laskien ensin kymmenet yhteen ja sitten ykköset yhteen. (Wright ym. 2006, 21–22.)

3.2 Kymmenjärjestelmän oppimisen merkitys

Lapsen tulee ymmärtää lukujärjestelmiin liittyvät säännöt ja periaatteet, jotta pystyy ymmärtämään ja tuottamaan lukuja sekä edistymään laskutaidoissaan (Lawton 2014, 21). Kymmenjärjestelmän hallinta ja sujuva peruslaskutaito luovat pohjaa koulumatematiikan osaamiseen ja arjen taidoissa selviytymiseen sekä määrittävät vahvasti myös myöhempää matematiikan opiskelun työläyttä tai helppoutta (Koponen 2012, 59). Vahva matemaattisten taitojen perusta luo edellytyksiä lukujärjestelmän rakenteen omaksumiseen. Paikka-arvon ja kymmenjärjestelmän ymmärtäminen auttavat lasta kehittämään ja käyttämään tehokkaampia sekä monipuolisempia laskustrategioita. (Hannula & Lepola 2006, 134–136.) Useat tutkimukset puolestaan osoittavat, että laskustrategiat ovat yhteydessä aritmeettisten perustaitojen eli yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskujen oppimiseen (esim. Baroody 2004; Ostad 1999; Koponen 2012).

Ikäheimo (2012) luonnehtii kymmenjärjestelmän hallintaa matematiikan osaamisen tärkeimmäksi kulmakiveksi, sillä se lisää ymmärrystä niin laskuihin kuin mittayksiköiden muunnoksiinkin, jolloin taidoista tulee pysyvämpiä eivätkä perustu enää ulkoa oppimiseen. Kymmenjärjestelmän osaamisella on keskeinen merkitys mittayksiköiden muunnosten oppimiseen. Erityisesti mittaamisen käsitteen ymmärtäminen, mittayksiköiden muunnosten

ymmärtäminen ja yksiköiden välisten määrällisten suhteiden ymmärtäminen tuovat haasteita, mikäli kymmenjärjestelmän paikka-arvoja ja desimaalilukuja tarkastellaan vain mekaanisesti, proseduraalisella tasolla tukematta oppilaan laajempaa ajattelustrategiaa. (Ikäheimo 2012, 3–6, 8; ks. myös Hiebert 1984, 19–24.) Korhosen (2013, 38–40) mukaan kymmenjärjestelmän osaamisen vaikutus ulottuu hyvin laajalle ja ymmärryksen puute vaikeuttaa olennaisesti uuden oppimista. Täydellinen kymmenjärjestelmän ymmärtäminen ei ole itsestään selvää ja usein oletetaankin, että lapsi ymmärtää ja osaa käyttää 10-järjestelmää ilman, että sitä on järjestelmällisesti opetettu (Ikäheimo ym. 2000, 15).

Ikäheimon (2012) mukaan myös desimaalilukujen käsitteen osalta tulee ymmärtää kymmenjärjestelmän periaate ja paikka-arvon käsite, sillä lukukäsitteen ymmärtäminen tuo myös laskuihin lisää ymmärrystä. Kun oppilas on ymmärtänyt, että luvussa 4,15 on esimerkiksi 4 kokonaista ja 1 kymmenesosa ja 5 sadasosaa, 4 kokonaista ja 15 sadasosaa, 4 kokonaista ja 150 tuhannesosaa tai 41 kymmenesosaa ja 5 sadasosaa, hallitsee hän kymmenjärjestelmän myös desimaalilukujen osalta. Kielellisessä ilmaisussa tulee huomioida opetuksen yhteydessä, että luku kirjoitetaan numeromerkeillä 4,15 mutta kyseinen luku puhutaan ja ilmaistaan: neljä kokonaista viisitoista sadasosaa. (Ikäheimo 2012, 24.) Myös Malaty (2003, 29) tähdentää, että oppilaiden tulee osata esittää annetusta desimaaliluvusta useita eri vaihtoehtoja. Desimaalilukujen merkityksen ymmärtäminen on riippuvainen kymmenjärjestelmän paikka-arvon käsitteen ymmärtämisestä. Desimaalilukujen ymmärtäminen edellyttää siis lukukäsitteen vahvaa tuntemusta, lukujen välisten suhteiden ymmärtämistä ja desimaalipilkun roolin käsittämistä osana kymmenjärjestelmää. Tyypillisesti epävarmuus desimaalilukujen käsittelytaidoissa näkyy, että oppilas ei ymmärrä mihin kohtaan desimaalipilkku kirjoitetaan ja miten saatu tulos tulkitaan. (Van de Walle ym. 2014, 361–362.)

3.3 Kymmenjärjestelmän opettamisen lähtökohtia

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (POPS 2014) mukaan vuosiluokilla 1 ja 2 matematiikan keskeisenä tavoitteena kymmenjärjestelmän osalta tulee tukea oppilaan lukukäsitteen kehittymistä ja kymmenjärjestelmän periaatteen ymmärtämistä sekä perehdyttää peruslaskutoimitusten periaatteisiin ja niiden ominaisuuksiin sisällyttäen opetukseen konkreettiset välineet. Vuosiluokkien 3–6 osalta tavoitellaan kymmenjärjestelmän ymmärtämisen vahvistamista ja laajentamista sisällyttäen osaksi kymmenjärjestelmää myös desimaaliluvut.

(Opetushallitus 2014, 128–129, 235–236.) Valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa ei erikseen mainita paikka-arvokäsitteen ymmärtämisen periaatteita tukevia linjauksia, kun taas Espoon näkökulmassa kymmenjärjestelmän ymmärtäminen paikkajärjestelmänä korostuu. (Ks. http://webfronter.com/espoo/perusopetuksen_ops_2016/)

Galperin teorian ulkoisen materiaalin ja ääneen ajattelun tarpeellisuus antaa hyvän pohjan niin matematiikan opetuksen kuin kymmenjärjestelmänkin opettamisen lähtökohtiin mahdollistaen lasten yksilöllisen etenemisen, huomionkiinnittämisen oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisyyn ja taitojen korjaamiseen (Ikäheimo & Risku 2004, 224–225). Haapasalon (2011) mukaan oppimisen perusperiaatteet voidaan tiivistää Galperin käsityksiä mukaillen niin, että opittava tieto ja taito rakentuvat hierakkisiksi käsitemalleiksi eli mentaalimalleiksi. Jos opittava asia on yksilölle uusi, hän pyrkii ymmärtämään sitä näiden jo olemassa olevien mentaalimallien avulla. Vähitellen mentaalimallit kehittyvät vastaamaan lähemmäksi todellisuutta. Matematiikassa näiden käsiterakenteiden rakentuminen on oleellista matemaattisen tiedon hierakkisen luonteen vuoksi. (Haapasalo 2011, 90.) Alun perin jo Piaget´n oppimisteorioista saadaan pohjaa ja tukea toiminnallisen oppimisen toteuttamiseen, jossa opittava asia käsitellään konkreettisissa tilanteissa ja omakohtaisten kokemusten merkityksiä hyödyntäen (Lindgren 1990, 58–59).

Toiminnallisella oppimisella pyritään hyödyntämään lapsen luontaisia kykyä käsitellä oppimaansa tietoa leikin tai toiminnan kautta. Erityisesti käsitteiden omaksuminen nousee keskiöön, jolloin yhden oikean vastauksen löytäminen ei ole pääasia. (Ikäheimo & Risku 2004, 223–225.) Unkarissa on hyödynnetty jo pitkään toiminnallisuutta matematiikan opetuksessa menestyksekkäästi (Räty-Záborszky 2006, 24–26). Tikkasen (2008) tutkimukset suomalaisten ja unkarilaisten matematiikan opetussuunnitelmien toteuttamisesta puolestaan osoittivat, että toiminnallinen matematiikka tarjosi enemmän käsitteellistä ymmärrystä matematiikan sisältöjä kohtaan sen sijaan, että olisi opiskeltu vain mekaanisen suorittamisen vuoksi. Matematiikka koettiin myös hyödylliseksi arkielämän tilanteisiin peilaten ja uudet opitut asiat tarpeelliseksi jatkoa ajatellen. (Tikkanen 2008, 160–167.)

Kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon käsitteen ymmärtämistä on tutkittu kansainvälisesti keskittyen opetuskulttuurien ja opetuskäytänteiden huomioimiseen sekä opetusinterventioita hyödyntäen (Fuson & Briars 1990; Donlan & Courlay 1999; Ross 2002; Van de Walle ym. 2014). Van de Wallen ym. (2014, 205–223) tutkimuksissa kymmenjärjestelmän ja paikka-

arvon opettamisen keskeisiksi lähtökohdiksi kulminoituvat lukusanan, numeromerkin ja luvun yhteyden mallintaminen konkreettisilla käsitteenmuodostusvälineillä, kielen merkityksen huomioiminen ja ajatteluprosessin tukeminen sekä ympäröivän arkielämän yhteyksien linkittäminen lukukäsitteen ja lukujenkäsittelytaitojen vahvistamiseksi. Rossin (2002, 422) tutkimukset kohdistuen 3–5-luokkalaisten oppilaiden kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon käsitteen ymmärtämisestä osoittavat, että paikka-arvokäsitteellä, puheella ja oman ajattelun näkyväksi tekemisellä sekä sosiaalisella vuorovaikutuksella on suurta merkitystä käsitteen ymmärtämisessä.

Ikäheimon (2012) mukaan kymmenjärjestelmävälineistö desimaaliosineen on osoittautunut erinomaiseksi keinoksi havainnollistaa ja konkretisoida lukuja, syventää lukukäsitettä, laskustrategioita ja lukukäsittelytaitoja. Matematiikan käsitteiden ymmärtäminen ja rakenteiden muodostuminen perustuvat konkreettisten mallien antamiin mielikuviin, jolloin oppilaan ajatteluprosessia saadaan tuettua pysyvillä ”ankkureilla”, kuten esimerkiksi kuutiosenttimetrin kokoisella ykköskuutiolla. Ikäheimo tiivistää lukukäsitteen opettamisen neljään vaiheeseen, joita ovat lukujen konkretisointi, lukujen vertailu, lukujonot ja lukujen pyöristäminen. Lukukäsitteen ymmärtämisen, kymmenjärjestelmän hallinnan ja laskutaitojen tärkeimpiä työskentelyperiaatteita käsitteenmuodostusvälineiden lisäksi ovat oppilaan oman ajattelun sanoittaminen ja sanallinen selostaminen sekä omakohtaisten kokemusten ja mielikuvien tuottaminen niin tutkimalla, nimeämällä, näyttämällä kuin piirtämälläkin. Tämä edellyttää, että opettajan tulee myös itse hallita matemaattisten käsitteiden perusteet ja toimintavälineiden käyttö. Oleellista on, että välineet ja käsitteitä tukevat toimintatavat ovat kaikkien oppilaiden saatavilla ja niitä käytetään tarkoituksenmukaisesti. (Ikäheimo 2012, 14, 16, 26; Ks. myös Korhonen 2013, 38–40.)

Perkkilä & Ojala (2009) argumentoivat, että opetuksen tulee perustua väistämättä konkreettisiin toimintatapoihin, sillä Kuuselan (2000; 2006) tutkimuksiin vedoten vain 30% lukion aloittavista oppilaista ja 7% yläkouluun siirtyvistä oppilaista kykenee abstraktiin ajatteluun. He korostavat matematiikan oppimisympäristöissä konkretian lisäksi sosiaalisen vuorovaikutuksen ja ajattelutaitojen merkitystä oppimista tukevina elementteinä. Ongelmaperustainen oppiminen, oppilaan aktiivisen roolin vaaliminen, oppimisen merkityksellisyyden ja oppilaiden yksilöllisen kehitystason näkeminen tuovat haasteita niin opettajille kuin koko opettajankoulutuslaitokselle. (Perkkilä & Ojala 2009, 59–60.)

4 MITTAAMISESTA MITTAYKSIKÖIDEN MUUNNOKSIIN ALAKOULUN MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

Mittaaminen on saavuttanut vuosisatojen kuluessa hyvin keskeisen osan ihmiskunnan arjesta. Mittaaminen sisältää monia tärkeiksi havaittuja käsitteitä, joilla on perustavanlaatuinen merkitys niin arkipäivän tilanteista selviytymiseen kuin matematiikan taitojen kehittymiseenkin. Mittaamisen historia todistaa, että ihmiset ovat kautta aikojen halunneet määritellä itseään ja maailmaa konkreettisesti erilaisten mittojen avulla. Mittojen avulla ihminen pyrkii muodostamaan käsityksiä elämän todellisuudesta. Koska toimintamme ja tapamme elää maailmassa tapahtuvat lähes vaistonvaraisesti näiden mitattujen asioiden ja ilmiöiden varassa, tuntuvat mittaamiseen liittyvät käytänteet lähes itsestäänselvyyksiltä. (Perhoniemi 2014, 7–8, ks. myös Robinson & Ketola 2008, 7–10.)

Tieteenfilosofian sanakirjan *A Companion to the Philosophy of Science* luonnehdinnan mukaan "Mittaaminen on tieteen keskeistä tiedollista toimintaa, joka yhdistää jonkin luvun ja jonkin määrän yrittäessä arvioida kyseessä olevan kvantiteetin suuruutta" (Perhoniemi 2014, 11–12). Mittaamisella tarkoitetaan kohteen määrän määrittämistä, joka käytännössä tapahtuu sisällyttämällä mittayksikköä mitattavaan kohteeseen. Mittaamisen kohteena on siis aina jokin ominaisuus, kuten esimerkiksi pituus ja paino, jonka määrä halutaan saada selville. Mittaluvun suuruus riippuu mittayksikön koosta, joten mitä pienempi mittayksikkö on, sitä suurempi on myös mittaluku. Suureet määritellään luonnon olioiden ja ilmiöiden ominaisuuksiksi, joita voidaan määrällisesti mitata tai laskea muiden mitattujen suureiden perusteella. Ominaisuudesta tulee suure, kun sille voidaan määritellä mittayksikkö. (SFS 2013, 5.)

Perhoniemi (2014) kirjoittaa teoksessaan, että mainintoja mittojen ihan varhaisimmista symboleista löytyy niin *Raamatusta* kuin jatkuen aina antiikin filosofien Platonin ja Aristoteleen käsityksiin mitoista ja mitan käsitteestä. Galileo Galilein ansiosta puolestaan matematiikka liitetiin osaksi fysiikkaa ja mittaaminen tuli näin osaksi sen tieteellisiä käytänteitä. Mittaaminen ja sen käsitteen antiikinaikainen ontologinen näkemys siirtyivät taka-alalle uuden 1600-luvun valistuksen ajan luonnontutkimukseen perustuvan näkemyksen tullessa vallalle. (Perhoniemi 2014, 29, 42, 74–82.) Yhtenäisen mittajärjestelmän syntyminen tapahtui vähitellen ja siihen siirtyminenkin toteutui lopulta verrattain myöhään. Yhteiskunnan toimiminen ilman näitä perustavanlaatuisia mitan käsitteitä ei olisi mahdollista. Kansainvälisiin tutki-

mustuloksiin nojaten koulumatematiikassa mittaamisen oppimisen haasteellisuudesta ja mittaamisen käsitteen ymmärtämisen vaikeudesta on jo pitkään ollut selkeitä näyttöjä (Battista 2007; Kloosterman, Rutledge & Kenney 2009, 357–365; Van de Walle ym. 2014, 397). Näiden näkökulmien johdattamana mittaaminen ja sen käsitteet tulee nähdä tärkeänä, arvokkaana ja hyödyllisenä aihekokonaisuutena myös koulumatematiikassa.

Seuraavien kappaleiden myötä tarkastelun kohteena on yhtenäisen mittayksikköjärjestelmän syntyminen ja sen rakenne osana mitan ja mittaamisen käsitteen kehityskulkua sekä mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Tarkastelen mittaamiseen liittyvien keskeisten käsitteiden ja periaatteiden valossa, mitä mittaaminen ja mittayksiköiden muunnokset ovat koulumatematiikan näkökulmasta, miten mittaamisen taidot kehittyvät ja minkälaisia haasteita mittaamisen ja mittayksiköiden muunnosten oppimisessa esiintyy. Kappaleen lopussa perehdytään myös mittaamisen ja mittayksiköiden muunnosten opettamisen peruslähtökohtiin nostaen esille perusopetuksen opetussuunnitelman näkökulman ja oppikirjojen merkityksen opetuksessa.

4.1 Mittayksikköjärjestelmän syntyminen ja sen rakenne

Yhteneväiseen mittajärjestelmään siirtyminen tapahtui vasta 1700-luvun lopun teollisen vallankumouksen seurauksena, jolloin Ranskasta lähtöisin oleva uusi, desimaaleihin perustuva mittajärjestelmä otettiin käyttöön. Ennen tätä metrijärjestelmän kehittämistä epäyhtenäiset ja sekavat mitat olivat vaikeuttaneet merkittävästi kaupankäyntiä ja koko yhteiskunnan elämää. Uuden järjestelmän perustavimmaksi yksiköksi tuli *metri*, jonka konkreettinen pituuden määritelmä pohjautui kymmenesmiljoonaosaksi Maan ympärysmitan neljänneksestä. Mittajärjestelmään siirtyminen ei sujunut ongelmitta, joten vanhoja mittoja käytettiin vielä 1830-luvun loppuun asti. Nykyisin Yhdysvallat, Myanmar ja Liberia eivät ole yhtenäistäneet maansa lakia metrijärjestelmään siirtymisestä. (Robinson & Ketola 2008, 12–15.)

Metrijärjestelmä, nykyisin kansainvälinen yksikköjärjestelmä SI-järjestelmä (*Systéme International d`Unités*) vahvistettiin nykyiseen muotoonsa vuonna 1960. SI-järjestelmän mukaisia mittasuureita ja niiden käyttöä valvoo kansainvälinen paino- ja mittavirasto BIMP (*Bureau International des Poids et Mesures*). (Robinson & Ketola 2008, 14–15.) SI-järjestelmän suurena etuna on mittayksiköiden kytkeminen kymmenjärjestelmään. Tätä pidettiin jo tuolloin kaikkein loogisimpana ja luonnollisimpana lukujärjestelmänä, jonka avulla mittayksi-

köiden välisiä suhteita voitiin ilmaista. Tämä kymmenjärjestelmään pohjautuva mittajärjestelmä suisti tieltään aikaisemmat ihmisen kehosta johdetut mitat ja mittaamisessa alettiin hyödyntää Maan mittoja. Pituuden yksikön, metrin lisäksi toiseksi perusyksiköksi otettiin kilogramma. Näistä yksiköistä johdettiin tilavuuden ja pinta-alan yksiköt, jotka kaikki sidottiin desimaaleihin merkitsemällä ne etuliitteillä millistä kiloon. (Alder 2002, 2–3; Perhoniemi 2014, 130–131.)

SI-järjestelmään kuuluu seitsemän perusyksikköä: metri (pituus), kilogramma (massa), sekunti (aika), ampeeri (sähkövirta), kelvin (termodynaaminen lämpötila), mooli (ainemäärä) ja kandela (valovoima). Näistä johdettuja yksiköitä ovat esimerkiksi hertsi (taajuus)ja celsiusaste (lämpötila). Lähtökohtana SI-järjestelmän perusyksiköille ovat kansainvälisen suurejärjestelmän ISQ (*International System of* Quantities) seitsemän perussuuretta, jotka ovat esiteltynä edellisessä luettelossa suluin merkittynä. Tilavuuden yksikkö kuutiometri (m^3) on puolestaan johdettu pituuden yksiköstä. (Robinson & Ketola 2008, 15; Ks. myös http://www.bipm.org.; SFS 2013, 7.) SI-järjestelmän hyväksyneitä jäsenvaltioita on tätä nykyään 55. Metrijärjestelmä tuli Suomessa käyttöön vuonna 1886 ja kansainväliset mittayksiköt tulivat käyttöön vuonna 1890. SI-järjestelmän yleismaailmalliseen käyttöön niin Suomessa kuin muualla maailmassakin siirryttiin vasta 1970-luvun loppupuolella, jonka käyttöönottoa valvoo mittakeskus (MIKES). (SFS 2013, 4.)

Tämän tutkimuksen kannalta on oleellista nostaa esille käytössä olevistamme standardisoiduista perusyksiköistä metri (pituus), kilogramma (massa) ja litra (tilavuus litroina) sekä näiden lisäksi johdannaisyksiköt pinta-ala sekä tilavuus kuutioina. Seuraavassa taulukossa on havainnollistettu Ikäheimoa (2012, 86; 2015a, 74; 2015b, 3) ja Johnson & Norrisia (2006, 262) mukaillen mittayksikköjärjestelmän rakennetta ja yhteyttä kymmenjärjestelmään pituuden, massan ja tilavuus litroina yksiköiden osalta.

Taulukko 1. Mittayksikköjärjestelmän rakenne pituuden, massan ja litratilavuuden yksiköissä

	1000= 10^3 tuhatkertainen	**100=10^2 satakertainen**	**10=10^1 kymmenkertainen**	**1= 10^0**	**0,1 =10^{-1} kymmenesosa**	**0,01=10^{-2} sadasosa**	**0,001=10^{-3} tuhannesosa**
Pituus	km	hm	dam	**m**	dm	cm	mm
	kilometri	hehto-metri	dekametri	**metri**	desimetri	senttimetri	millimetri
Massa	kg	hg	dag	**g**	dg	cg	mg
	kilo-gramma	hehto-gramma	deka-gramma	**gramma**	desi-gramma	sentti-gramma	milli-gramma
Tilavuus litroina	kl	hl	dal	**l**	dl	cl	ml
	kilolitra	hehtolitra	dekalitra	**litra**	desilitra	senttilitra	millilitra

Taulukko 1 havainnollistaa, että seuraava yksikkö on aina kymmenkertainen edelliseen verrattuna ja edellinen aina kymmenesosa seuraavasta yksiköstä. Suhdeluku on siis 10. Pedagogisista syistä massan perusyksiköksi tässä taulukossa on valittu gramma. (Ikäheimo 2015b, 3.) Pinta-alan yksiköt ja kuutiotilavuuden yksiköt voidaan mittayksikköjärjestelmässä havainnollistaa ja yhdistää kymmenjärjestelmään Ikäheimon (2015b) mukaan seuraavasti:

Taulukko 2. Mittayksikköjärjestelmän rakenne pinta-alan ja kuutiotilavuuden yksiköissä (Ikäheimo 2015b).

	10^6	**10^4**	**10^2**	**1= 10^0**	**10^{-2}**	**10^{-4}**	**10^{-6}**
Pinta-ala	km^2	ha	a	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
	neliökilo-metri	hehtaari	aari	neliö-metri	neliödesi-metri	neliösentti-metri	neliömilli-metri
Tilavuus kuutioina	**10^6**	**10^3**		**1= 10^0**		**10^{-3}**	
	m^3	dm^3		cm^3		mm^3	
	kuutiometri	kuutiodesimetri		kuutiosenttimetri		kuutiomillimetri	

Taulukko 2 havainnollistaa, miten pinta-alan yksiköissä suhdeluku on 100. Näin ollen seuraava yksikkö on aina satakertainen edelliseen verrattuna ja edellinen aina sadasosa seuraavasta yksiköstä. Vastaavasti kuutiotilavuuden suhdeluku on 1000, jolloin seuraava yksikkö on aina tuhatkertainen edelliseen verrattuna ja edellinen aina tuhannesosa seuraavasta yksiköstä. Pedagogisista syistä kuutiotilavuuden perusyksiköksi on valittu kuutiosenttimetri.

(Ikäheimo 2015b, 6–7; 2012, 75–86.) Seuraavassa kappaleessa avataan mittaamisen käsitteen ymmärtämisen keskeisiä periaatteita ja mittaamistaidon kehittymisen lähtökohtia, jotka ovat tukemassa niin mittaamisen kuin mittayksiköiden muunnostenkin käsitteellistä ymmärtämistä.

4.2 Mittaamisen käsitteen ymmärtäminen

Mittaamisella on ollut aina tärkeä rooli yhteiskunnassamme ja se on yksi reaalimaailman tärkeimpiä matematiikan sovelluksia. Mittaamisessa yhdistyy kaksi matematiikan ratkaisevaa osa-aluetta, geometria ja reaaliluvut. Mittaamisen keskeisiin elementteihin kuuluvat luvut ja laskutoimitukset. Mittaamisen prosessissa jatkuva ominaisuus, kuten esimerkiksi pituus tai massa, jaetaan osiin, jotta ne voidaan laskea mittaluvun saamiseksi. Mittaaminen antaa mallin ja sovelluksen niin luvuille kuin aritmeettisillekin operaatioille. (Clements & Sarama 2007, 523.) Mittaaminen on vertailua, jossa mitattavia kohteita tai niiden määrää verrataan johonkin sovittuun mittayksikköön. Mittaamalla voidaan selvittää mitattavan kohteen mitattavissa olevia ominaisuuksia, kuten pituutta, massaa, pinta-alaa ja tilavuutta. Mittaamisen periaatteen ymmärtäminen edellyttää, että lapsi oivaltaa kuinka monta kertaa valittu mittayksikkö sisältyy mitattavaan kohteeseen. (Clements 2004, 50.)

Tutkimukset osoittavat, että mittaaminen on monivaiheinen prosessi, jonka oppimiseen tarvitaan hyvin monenlaisia tärkeitä taitoja ja erityisesti mittaamisen käsitteellistä ymmärtämistä. Mittaamisen oppimisen perusta lähtee varhaisista vuosista ja kehittyy vähitellen pitkällisen työn tuloksena niin kuin Piaget on kollegoineen jo 1960-luvulla havainnut. (Clements & Sarama 2007, 517, 523; Ks. myös Piaget, Inhelder & Szeminska 1960.) Mittaamisen tarve syntyy lapsen luontaisesta tarpeesta vertailla esimerkiksi kappaleiden pituuksia keskenään. Alkuun kappaleiden pituuksia vertaillaan asettamalla kappaleet vierekkäin, jolloin silmämääräisesti voidaan arvioida kappaleiden välisiä eroja. Jos verrattavia kappaleita ei voi vertailla vierekkäin, syntyy tarve mittaamiseen. Tähän tarvitaan jokin mittaväline, jotta esimerkiksi kappaleiden pituuksia voidaan verrata toisiinsa. Mittaamisen avulla kappaleen pituus voidaan yhdistää lukuun ja näin lukujen avulla verrata kappaleita toisiinsa. (Barret, Jones, Thornton & Dickson 2003, 19.)

Piaget`n tutkimuksien myötä syntyneet havainnot osoittivat, että transitiivisuuden ja säilyvyyden periaatteiden ymmärtäminen liittyvät kiinteästi mittaamisen oppimisen yhteyteen. Tutkimuksissa ilmeni, että lapsen tulee ymmärtää pituus suureeksi eli ominaisuudeksi, jota

voidaan mitata. Lisäksi suureen transitiivisen periaatteen ymmärtäminen on edellytys koko mittayksiköiden ja metrisen järjestelmän omaksumiseen. (Piaget & Inhelder 1956; Piaget ym. 1960.) Transitiivisuutta voidaan kuvata suomenkielisellä sanalla siirrettävyys. Transitiivisuus tarkoittaa kykyä päätellä kolmen annetun esineen tai kappaleen ominaisuus niiden välisten suhteiden avulla. Esimerkiksi kun tiedämme, että laatikko A on painavampi kuin laatikko B ja laatikko B on painavampi kuin laatikko C, pystymme päättelemään, että laatikon A täytyy olla painavampi kuin laatikko C. Näin kykenemme vertailemaan laatikkoja A ja C suhteessa laatikkoon B. (Dudgeon 2014, 120; Clements & Sarama 2007, 519) Transitiivisuuden idean ymmärtämisellä on ratkaiseva tekijä mittaamistaitojen kehittymisessä. Kun lapsi oppii transitiivisuuden idean, hän osaa käyttää esineiden mittaamisessa kolmatta esinettä vertailtaessa kahden esineen pituutta tai painoa. Esimerkiksi vertailtaessa kahta peräkkäistä palikkajonon pituutta, lapsi kykenee päättelemään pidemmän jonon käyttäen apunaan keppiä. (Stephan & Clements 2003, 5; Clements & Sarama 2007, 519.)

Dudgeon (2014, 120) viittaa myös artikkelissaan Piaget´n säilyvyysteorian merkityksellisyyteen mittaamisen yhteydessä. Säilyvyyden käsitteellä mittaamisen yhteydessä tarkoitetaan, että kappaleen, kohteen tai ominaisuuden määrä ei muutu, vaikka sen sijainti tilassa muuttuu. Esimerkiksi pituuden säilyvyydellä tarkoitetaan, että jos kappaletta siirretään, sen pituus ei muutu. (Stephan & Clements 2003, 5–6.) Klassinen esimerkki säilyvyyden käsitteeseen liittyy myös se, että kaadettaessa kapeammasta lasista vettä leveämpään lasiin, ei veden määrä muutu (Piaget & Inhelder 1977, 96).

Clementsin ja Saraman (2007) tutkimusten mukaan mittaamisen käsitteen ymmärtämistä tukevat säilymisen ja transitiivisuuden käsitteiden lisäksi kuusi muuta keskeistä periaatetta. Näitä ovat ominaisuuden ymmärtäminen, jakaminen samansuuruisiin osiin (osittaminen), kappaleen toistaminen (iteraatio), etäisyyden kertyminen, alkupiste sekä luvun ja mittaamisen välinen suhde. Ominaisuuden ymmärtämisen periaate merkitsee, että lapsi ymmärtää tietyn ominaisuuden, kuten pituuden koostuvan eri osapituuksista. (Clements & Sarama 2007, 519; Lee & Francis 2016, 220.) Tietoisuus ominaisuudesta on yksi mittaamisen taidon kehityspisteistä, joilla on tärkeä merkitys mittaamisen taitojen kehittymisessä niin pituuden, massan, pinta-alan kuin tilavuudenkin käsitteiden yhteydessä (Clarke, Cheeseman, McDonough & Clarke 2003, 71).

Osittaminen tarkoittaa kappaleen jakamista samankokoisiin osiin ajatuksen tasolla (Clements & Sarama 2007, 519). Osittamisen idea on merkityksellinen, sillä lapsi ymmärtää, että

mitattava ominaisuus on jatkuva käsite. Mitattavan kappaleen voi jakaa ”osiin” jo ennen varsinaista fyysistä mittaamiseen liittyvää toimenpidettä. Kappaleen toistaminen merkitsee kykyä ajatella kappaletta osana isompaa mitattavaa kappaletta. Esimerkiksi pituuden mittaamisessa lapsi kykenee asettamaan mittakappaleen toistuvasti peräkkäin yltääkseen koko mitattavan kappaleen pituudelle. (Stephan & Clements 2003, 4–5.) Mittaamisen onnistuminen edellyttää taitoa käyttää tietyissä tilanteissa siihen kuuluvia, keskenään identtisiä mittayksiköitä, mutta myös ymmärrystä siitä, että mittayksiköiden tulee täyttää koko mitattava alue (Lehrer, Jaslow & Curtis 2003, 102–103). Etäisyyden kertymisen periaatteella tarkoitetaan, että lapsi kykenee mittaamaan kerryttäen etäisyyttä ja käsittää, että mittaluku viittaa juuri etäisyyteen mitattavan kappaleen alusta loppuun (Stephan & Clements 2003, 6–7). Piaget kollegoineen toteavat lapsen kykenevän kerryttävään tulkintaan, kun hänelle on rakentunut kokonaisvaltainen näkemys lineaarisesta mittaamisesta (Piaget ym. 1960).

Alkupisteen käsite on merkityksellinen, että ymmärtää minkä tahansa mitta-asteikon pisteen toimivan alkupisteenä. Oleellista on tiedostaa, että mittaamisen alkupiste on nolla tai kohta, joka tarkoittaa esimerkiksi pituutta mitattaessa sitä kohtaa, jossa pituutta ei vielä ole. Mittaamisella on merkittävä suhde myös lukuun, joten mittaaminen on ikään kuin laskemista. (Clements & Sarama 2007, 519.) Mittaaminen on kuitenkin käsitteellisesti laskemiseen verrattuna vaativampaa, koska mitattaessa kappaleet on nähtävä eri tavalla. Perinteisessä laskemisessa laskettavat kohteet ovat toisistaan erillisiä ja mittaamisen yhteydessä taas kohteena on jatkuva kappale. (Stephan & Clements 2003, 7.) Clementsin ja Stephanin (2004, 303) tutkimuksien mukaan koulumatematiikassa ongelmia tulee siinä, että lapsen tulee osata muuttaa ajattelumaailmaan yhteenlaskettavista kappaleista kuin mihin hän on tottunut.

Lehrer ym. (2003) nostavat näiden kaikkien periaatteiden lisäksi mittaamisen käsitteen ymmärtämisen keskiöön vielä mittayksikön additiivisuuden tarkoittaen sillä, että mitat voivat olla additiivisia niin, että esimerkiksi mittaluku 10 voi koostua osista 8 ja 2 ja niin edelleen. Lisäksi he tuovat esille täsmällisyyden käsitteen tarkoittaen näin, että mittayksikön valinta suhteessa kappaleeseen määrää mitan suhteellisen täsmällisyyden. Tämä tarkoittaa, että mittaaminen on luonteeltaan aina likimääräistä. (Lehrer ym. 2003, 102.) Tutkijat käyvät edelleen väittelyä siitä, missä järjestyksessä ja missä iässä mittaamiseen liittyvät keskeiset käsitteen kehittyvät, mutta ovat kuitenkin yhdenmukaisia siinä, että nämä periaatteet muodostavat kokonaisuudessaan mittaamisen oppimisen perustan. (Clements & Sarama 2007, 519.)

4.3 Mittaamisen taitojen kehittyminen

Mittaamisen ymmärtämisen perusta on vahvasti sidoksissa lapsen varhaisiin matemaattisiin taitoihin, sillä mittaamiseen vaadittavat tukirakennelmat alkavat kehittyä jo pitkälti koulua edeltävinä vuosina. Lapselle on kehittynyt jo ennen kouluun menoa käsitys päättymättömistä ominaisuuksista, kuten pituudesta, massasta ja painosta. Sinänsä kolmevuotias lapsi jo tietää, jos hänelle annetaan savea lisää, on hänellä tämän jälkeen enemmän savea kuin aluksi. Hän ei kykene kuitenkaan suoraan vertailemaan kahden savimäärän keskinäistä eroa. Kahden kappaleen tai ominaisuuden keskinäinen vertailu suoraan toisiinsa ja niiden yhtäsuuruuden tai erisuuruuden tunnistaminen ovat ratkaisevia mittaamistaitojen kehityspisteitä. Lapsen saavuttaessa noin 4–5 vuoden iän voidaan todeta lapsen oppineen arvioimaan määriä järkevin perustein, kuten mittaamalla ja arvioimalla kappaleita niiden ulkoisten ominaisuuksien perusteella. (Clements & Stephan 2004, 300.)

Piaget´n mukaan lapsen tulee ymmärtää ominaisuus, kuten pituus, massa tai tilavuus säilyviksi suureiksi ja käsittää niiden transitiivisuuden luonne ennen kuin kykenee kokonaisvaltaisesti ymmärtämään mittaamisen periaatteen ja mittayksikköjärjestelmän. Piaget´n tutkimukset osoittivat, että lapsen ymmärrys esimerkiksi pituuden mittaamisesta alkaa pituuksien vertailujen kautta jatkuen aina transitiivisuuden periaatteen ymmärtämisen kautta eri pituuksien vertailuun suhteessa valittuun vertailukappaleeseen. Lapsen tulee hallita mitan käsite, jotta ymmärtää niin yksiköiden laskemisen periaatteen pituuden mittaamisessa kuin viivoittimen oikeanlaisen käyttötarkoituksenkin. Lapsi saavuttaa mittaamiseen liittyvät keskeiset käsitteet konkreettisten operaatioiden vaiheessa noin 8–10 vuoden ikäisenä. (Piaget ym. 1960.)

Clementsin ja Saraman (2007, 520) mukaan lapsi voi oppia mittaamisen ideoita ilman, että ymmärtää täysin transitiivisuuden ja säilymisen periaatteen. Myös Hiebertin (1984, 19–24) tutkimukset osoittavat, etteivät transitiivisuus ja säilymisen ymmärtäminen ole välttämätön ehto esimerkiksi pituuksien epäsuoraan vertailuun tai mittayksiköiden toistamiselle (iteraatio). Osa tutkijoista pitää edelleenkin kyseisiä periaatteita tärkeinä ehtoina mittaamisen käsitteen oppimisessa. Esimerkiksi Kamii ja Clark (1997, 120–121) tutkiessaan 1–5 luokkien oppilaiden pituuden mittaamista saivat vastaavanlaisia tuloksia kuin Piaget`n tutkimukset. Mittaamisen oppimista tukevat keskeiset ideat osoittautuvat luontaisesti tärkeäksi myös

siksi, että ne auttavat lapsia tekemään eroa diskreettien (erillisten) ja jatkuvien määrien välille, joka onkin osoittautunut lapsille useimmiten haastavaksi ymmärtää (Clements & Sarama 2007, 523).

The Early Numeracy Research Project (ENRP) on Australiassa toteutettu matematiikan oppimista tukeva tutkimushanke, jossa luotiin raamit matematiikan oppimisen keskeisistä kehityspisteistä. Nämä kehityspisteet sopivat niin pituuden ja massan kuin pinta-alan ja tilavuudenkin oppimisen ja taitojen kehittymisen kuvaamiseen. Mittaamisen osalta vaiheet ovat seuraavat:

1. Lapsi on tietoinen ominaisuudesta ja sen kuvailevasta kielestä.
2. Lapsi vertailee, järjestelee ja sovittaa yhteen kappaleita ominaisuuksien perusteella.
3. Lapsi käyttää yhtäläisiä yksikköjä tarkoituksenmukaisesti liittäen luvun ja yksikön mittaan.
4. Lapsi valitsee ja käyttää formaalia mittayksikköä arviointiin ja täsmälliseen mittaamiseen.
5. Lapsi ratkaisee joukon ongelmia, jotka vaativat tärkeiden käsitteiden ja taitojen hallintaa. (Clarke ym. 2003, 70–71; Cheeseman, McDonough & Ferguson 2014, 133.)

4.4 Mittaamisen ja mittayksiköiden muunnosten oppimisen haasteet

Mittaaminen on yksi hyödyllisimmistä matematiikan sisältöalueista, jolla on tärkeä merkitys niin elämäntaitojen, ammatillisten tehtävien kuin kehittyneen matemaattisen lukutaidonkin kannalta. Mittaamisella tulisi olla keskeinen asema koulumatematiikassa läpi koko perusopetuksen, koska se auttaa oppilaita näkemään matematiikan tarpeellisuuden jokapäiväisessä elämässä ja kehittämään näin monia matemaattisia käsitteitä ja taitoja. (Van De Walle ym. 2014, 397.) Mittaamisen oppimista voidaan rinnastaa uuden kielen, mittaamisen kielen oppimiseen. Mittaamisen kieleen liittyy olennaisesti semantiikka, syntaksi, kielioppi ja pragmatiikka ihan niin kuin puhuttavassa kielessäkin. Semantiikka viittaa mittayksiköiden merkitykseen, syntaksi puolestaan mittayksiköiden rooliin mittayksikköjärjestelmässä, kielioppi sääntöihin ja rajoituksiin sekä pragmatiikka mittaamiseen mielekkäällä tavalla. (Joram 2003, 65–66.)

Hiebert (1984) pohtii artikkelissaan syitä, miksi oppilailla on vaikeuksia mittaamisen peruskäsitteiden ymmärtämisessä. Hän näkee syiden alkuperän johtuvan proseduaalisen ja konseptuaalisen tiedon ristiriitaisuuksista. Oppilaat osaavat mekaanisesti laskea mittayksiköitä yhteen tai tehdä yksikönmuunnoksia (proseduaalinen taito), mutta he eivät osaa käyttää opittua taitoa uusissa tilanteissa, eikä heillä ole käsitystä tuloksen merkityksestä tai käyttöyhteydestä (konseptuaalinen taito). Oppilaat toimivat ulkoa opeteltujen sääntöjen mukaisesti epäloogisesti ja kykenevät rutiininomaisiin tehtäviin. (Hiebert 1984, 19–24.) Samanlaisia ongelmia on ilmennyt Lehrerin ym. (2003) tutkimuksissa, sillä oppilaiden on ollut vaikea ymmärtää mittayksiköiden lineaarisuutta. Esimerkiksi pituuden mittaamisessa hankaluuksia ilmenee viivaimen käytössä. Oppilaat eivät ymmärrä, että pituuden mittaaminen voidaan aloittaa mistä tahansa asteikon kohdalta, eikä vain nollapisteestä. Tämän ymmärtäminen vaatii kykyä koordinoida viivaimen asteikon päätepisteitä mentaalisesti, sillä vastausta ei voi nähdä suoraan viivaimesta ilman laskemista. (Lehrer ym. 2003, 103.)

Mittaamisen käsitteelliseen ymmärtämiseen liittyy joukko monenlaisia tietoja ja taitoja. Dudgeonin (2014, 121) tutkimuksissa näkyy vahvasti, miten mittaamisen käsitteelliseen ymmärrykseen kulminoituu vahvasti säilyvyyden ja transitiivisuuden luonteen käsittäminen. Käänteinen suhde mittakappaleen koon ja tarvittavan määrän välillä näyttävät olevan riippuvaisia säilyvyyden ja transitiivisuuden ideoista. Mittaluvun suuruus riippuu siis mittayksikön koosta, sillä mitä pienempi mittayksikkö on, sitä suurempi on myös mittaluku. Oppilaiden voi olla myös vaikea ymmärtää diskreettien ja jatkuvien lukumäärien välistä yhteyttä. (Clements & Sarama 2007, 520–523.) Vahvaa mittaamisen käsitteellistä ymmärtämistä osoittaa, että osaa käyttää tilanteesta riippuen keskenään identtisiä mittayksiköitä, ja että mittayksiköiden tulee peittää mitattava alue kokonaisuudessaan. Oppilaan tulee osata esimerkiksi pituutta mitattaessa laittaa mittayksiköt peräkkäin ilman välejä ja päällekkäisyyksiä. (Lehrer ym. 2003, 102.)

Ikäheimon (2011a; 2011b; 2012) mukaan mittayksiköiden muunnokset tuottavat oppilaille hankaluuksia. Hänen kehittämän ALVA-kartoituksen eli Ammattilaskennan valmiuksien kartoituksen tulokset yläkoulu- ja lukioikäisillä osoittavat, että yksikönmuunnokset ovat murtolukujen ja prosenttilaskujen ohella kaikkein heikoimmin hallinnassa. (Ikäheimo 2011b, 8; 2011a; Ikäheimo 2012, 6, 76.) Yksikönmuunnokset edellyttävät vankkaa lukukäsitteen, lukujen ja laskutoimitusten peruskäsitteistön hallintaa sekä mittaamisen käsitteen ja sen keskeisten periaatteiden ymmärtämistä. Mittaamisen käsite ja mittayksiköiden muun-

nosten periaatteet eivät avaudu oppilaille ilman heidän omia mittaamiskokemuksiaan, monipuolisten ja konkreettisten mittavälineiden käyttöä sekä mittayksikköjärjestelmän ymmärtämistä ja sen linkittämistä kymmenjärjestelmään. Mittaustulosten mekaanisen laskemisen ja yksikönmuunnosten ulkoa opettelun sijaan painopiste tulee kohdistaa mittaamisen ja mittayksiköiden käsitteelliseen ymmärtämiseen sekä lukukäsitteen vahvistamiseen käsitteenmuodostumista tukevilla välineillä. Näin taidoista ja oppimistuloksista tulee pysyvämpiä ja mittaamisesta merkityksellisempää sekä yksikönmuunnosten käyttötarkoitus hahmottuu selkeämmin. (Ikäheimo 2011, 8; Ikäheimo 2012, 76–86; Korhonen 2013, 38–40.)

Mittaamisen oppimisen haasteista on paljon näyttöä kansainvälisellä tasolla, mutta kotimaista tutkimusta, jossa mittaamistaidot olisivat olleet tutkimuksen pääkohteena, ei ole Suomessa toteutettu. Haapasalo on kuitenkin 1990-luvulla tutkinut desimaalilukujen ja yksikönmuunnosten oppimista konstruktivistisestä näkökulmasta sekä oppikirjojen ja opetussuunnitelman luonnetta käsitteenmuodostusprosessissa. Tutkimukset osoittavat jo tuolloin, että kuudennen luokan oppilaista aina lukion oppilaisiin asti yksikönmuunnosten hallinnassa on ollut puutteita. Desimaalilukuihin ja yksikönmuunnoksiin liittyvä käsitteistö, oppilaiden kyky muodostaa ja omaksua ne tarkoituksenmukaisesti ovat aivan olennainen tapa kehittää matemaattista tietotaitoa. Tutkimukset nostavat erityisenä huolenaiheena oppikirjojen riittämättömän pureutumisen kielellisiin matemaattisiin ilmauksiin, ajattelustrategioiden tukemiseen ja ongelmaratkaisun sekä soveltamistaitojen kehittämiseen. Lisäksi desimaalilukujen oppiminen irrotetaan mittaamisesta, tarkkuuskäsitteestä ja yksikönmuunnoksista, vaikka niiden pitäisi päinvastoin olla toisiaan tukevana perustana. (Haapasalo 1993, 57, 79–84.)

Suomi on ollut mukana neljäsluokkalaisten osalta TIMSS-tutkimuksissa (Trends in International Mathematics and Science Study) vuosina 1999, 2011 ja 2015. Matemaattisten taitojen osalta tutkimuksessa mitataan seuraavia osa-alueita: luvut ja laskutoimitukset, geometriset muodot ja mittaaminen sekä tietoaineiston käsittely. Vuoden 2011 tutkimuksissa geometrian ja mittaamisen osa-alue todettiin kaikissa osallistujamaissa keskimääräistä heikommaksi. Matematiikan osaamisessa Suomi sijoittui vertailussa kahdeksanneksi. (Kupari, Sulkunen, Vettenranta & Nissinen 2012, 5–10, 27, 32.) Juuri julkaistut vuoden 2015 tulokset osoittavat, että suomalaisten lasten matematiikan taso on kaikilla osa-alueilla laskenut, eikä Suomi yllä enää kymmenen parhaan joukkoon. Matematiikan osaamisessa on havaittavissa useissa maissa sisältöalueittain vaihtelevuutta, mutta Suomessa osaaminen kaikissa sisältöalueissa oli hyvin tasaista. Lukujen ja laskutoimitusten osaaminen oli tässä tutkimuksessa heikompaa kuin geometrian ja mittaamisen osaaminen. (Vettenranta ym. 2016, 5, 12, 26–31.)

OECD-maiden keskuudessa toteutettavissa PISA-tutkimuksissa tutkitaan 15-vuotiaiden lukutaitoa ja matemaattista sekä luonnontieteellistä osaamista. Vuoden 2012 PISA-tutkimuksissa havaittiin myös mittaamisen ja geometrian osa-alueen hallinnan olevan muita sisältöalueita heikompi. (Välijärvi & Kupari 2015.) Myös opetushallituksen toteuttamissa tutkimuksissa 2008 ja 2011 mittaaminen ja geometrian osaaminen osataan heikoiten (Niemi & Metsämuuronen 2010; Hirvonen 2012). Kaikissa näissä tutkimuksissa mittaamista on arvioitu kuitenkin vain osana geometriaa. Mittayksiköiden muunnosten hallinnasta omana sisältöalueenaan ei ole kansainvälistä ja kotimaista tieteellistä tutkimusta. Dudgeon (2014, 151–154) kirjoittaa artikkelissaan englantilaisesta tutkimuksesta, jossa on kiinnitetty huomiota samanlaisiin mittayksiköiden muunnoksissa esiintyviin hankaluuksiin kuin mitä Ikäheimo (2011; 2012; 2015a; 2015b; 2016) on julkaisuissa ja artikkeleissa tuonut esille.

Yhdysvalloissa toteutettujen oppilaiden matemaattisia taitoja mittaavien NAEP-tutkimusten (National Assesment of Educational Progress) tulokset ovat jo vuosikymmeniä osoittaneet huolestuttavia merkkejä juuri mittaamistaitojen ja mittaamisen käsitteen osaamisen heikosta tasosta kaikilla ikäryhmillä. Oppilailla on havaittu epäselvyyksiä erilaisten mittavälineiden käyttöön liittyvissä tilanteissa, virheellisiä käsityksiä mittaustulosten tulkinnassa ja etäisyyksien arvioimisen tarkoituksenmukaisuudessa. (Blume, Balindo & Walcott 2007; Kloosterman ym. 2009.) Smith III, Van Den Heuvel-Panhuizen & Teppo (2011, 618) arvioivat artikkelissaan, että kansainvälisesti on kiinnitetty huomiota oppilaiden heikkoihin oppimistuloksiin mittaamisen osa-alueella, mittaamisen ymmärtämiseen osana kymmenjärjestelmää sekä diskreettien ja jatkuvan määrän välisten suhteiden virheellisiin käsityksiin.

Viimeaikaiset tutkimukset suosittelevat luomaan mittaamisen prosessissa sen käsitteellistä perustaa, jolloin oppilas oppii mittaamaan ja arvioimaan mielekkäällä tavalla. Mitan käsitteen haasteet ohjaavat noudattamaan mittaamisen opettamisessa vaiheittaisuutta, jossa edetään vertailun kautta epästandardien mittayksiköiden eli ns. omien mittojen käyttöön ja siitä edelleen kohti standardien mittayksiköiden ja mittavälineiden käyttöön. (Van De Walle ym. 2014, 399.) Grant & Kline 2003, 46 toteavatkin, että perinteisesti on kiinnitetty enemmän huomiota siihen, miten mitataan ja siirrytty nopeasti standardien mittavälineiden käyttöön. Jo Piaget havaitsi ongelman, että mittaamisen oppimisen merkityksellisyys ja käsitteen ymmärtäminen vaarantuvat, mikäli oppimista ohjataan liian paljon sanallisesti eikä sitä yhdistetä mielekkääseen toimintaan (Beard 1971, 113).

4.5 Mittaamisen ja mittayksiköiden muunnosten opettamisen peruslähtökohtia

Mittaamisen opettaminen suositellaan aloittamaan käyttäen epästandardeja mittayksiköitä, kuten eripituisia keppejä, paperiliittimiä tai värisauvoja. Niiden käyttäminen lisää mittakäsitteen ymmärrystä ja vahvistaa myös käsitystä standardien mittayksiköiden tarpeesta. Epästandardien mittayksiköiden käyttöä painotetaan niiden havainnollistavan ja konkreettisen luonteensa vuoksi. (Van de Walle ym. 2014, 399–405.) Mittaamisen opetuksessa ohjataan yleisesti noudattamaan Piaget`n teoriaan nojautuvaa etenemisjärjestystä: alkaen suorasta vertailusta kohti epäsuoraan vertailuun ja jatkuen mittaamiseen epästandardeilla mittayksiköillä ja siitä manipuloitavien standardien mittayksiköiden (vakiomittayksiköiden) sisällyttämiseen sekä viivaimen käyttöön. (Clements & Sarama 2004, 304–305; Van de Walle 2014, 399.) Suorassa vertailussa kaksi objektia asetetaan vierekkäin ja verrataan niitä keskenään, kun taas epäsuorassa vertailussa tarvitaan mittakappale, jonka avulla verrataan kahta objektia keskenään, joita ei ole voitu asettaa rinnakkain. Molemmat vertailutavat ovat oleellisia ja kehittävät lasten ymmärrystä mittayksiköiden ominaisuuksista ja mittaamisen perusprosessista. (Grant & Kline 2003, 46–47.)

Mittaamisen opettamisessa painopiste tulee suunnata käsitteiden oppimiseen, eikä niinkään yksittäisten ja irrallisten taitojen opettamiseen. Mittaaminen ja mittayksiköt ovatkin kaksi eri asiaa, jotka liittyvät toisiinsa, mutta ne tulee opettaa erikseen. Standardien mittayksiköiden opettamiseen voidaan sisällyttää kolme laajaa tavoitetta, joista ensimmäinen tarkoittaa perehtyneisyyttä yksikön ominaisuudesta. Oppilaalla on perusidea ja likimääräinen käsitys yksikön koosta ja standardimittojen tarpeellisuudesta. Toisena tärkeänä tavoitteena on kyky valita sopivia mittayksikköjä ja käyttää mittayksikköjä tarkoituksenmukaisesti. Taitojen kehittyminen edellyttää, että opetuksessa tarjotaan oppilaille käytännöllisiä ja todellisia mittaamiskokemuksia. Kolmantena tavoitteena on yksiköiden välisten suhteiden ymmärtäminen. Yksiköiden väliset suhteet perustuvat mittayksikköjärjestelmässä oleviin sopimuksiin, joiden tietoisuutta tulee vahvistaa monipuolisten kokemusten kautta. Oppilaat tarvitsevat ymmärrystä yksiköiden välisten suhteiden rakentumisesta ja niiden yhteydestä kymmenjärjestelmään. (Van de Walle 2014, 400–411.)

Mittaamisen perusperiaatteena on ensin arvioida ja sitten mitata, mikä näkyy vahvasti myös Ikäheimon opetuksellisissa periaatteissa (Ikäheimo 2012, 76–86). Mittaamisen arviointi (estimointi) on hyödyllinen taito ja itsessään jo yksi tärkeimpiä laskutaidon osia, jolle on myös arkitilanteissa mielekästä käyttöä, mikäli mittavälineitä ei ole saatavilla. (Joram, Gabriele,

Bentheau, Gelman & Subrahmanyam 2005, 4–5.) Mittaamisen arviointi tarjoaa mentaalisia ja visuaalisia tietoja mittaamisesta ja vertailusta ilman mittavälineitä, perehdyttää mittayksiköiden luonteeseen ja motivoi tarkoituksenmukaiseen mittaamistehtäviin. Kuvitteellisten mittakappaleiden käyttö ja referenssipisteet ovat tutkimusten mukaan yksi hyödyllisimmistä strategioista mittaamisen opettamisessa. Ne tarjoavat mahdollisuuden havainnollistaa mittaamisen kuuluvia olennaisia prosesseja, kuten iteratiivista luonnetta (yksikön toistoa), mittayksiköiden identtisyyttä ja mitattavan kohteen peittämistä. (Van de Walle 2014, 401–402.) Joramin (2003) tutkimusten mukaan kuvitteelliset mittakappaleet lisäävät mielekkyyttä ja ymmärrystä standardeista mittayksiköistä. Kuvitteellisella mittakappaleella tarkoitetaan esimerkiksi matkaa kotoa kouluun, joka on tasan kilometri. Näin kilometrille on olemassa selkeä kuvitteellinen mittakappale, jolloin myös standardimittayksikkö kilometri tulee tutuksi. Aikuisilla on tutkimusten mukaan olemassa luonnostaan valikoima erilaisia kuvitteellisia mittayksiköitä. Sen sijaan lapsilla näitä tärkeitä ikään kuin vertailupisteitä on verrattain vähän. (Joram 2003, 57.)

Ikäheimon (2012; 2015b) mukaan mittaamisen käsitteen ymmärtäminen, tietoisuus mittayksiköistä ja mittayksiköiden muunnosten hallinta edellyttävät, että opetuksessa kiinnitetään huomiota oppilaiden omakohtaisiin mittaamiskokemuksiin. Myös sanallinen selostaminen ja toiminnan kielentäminen ovat aivan olennaisia rakentamaan pohjaa ymmärrykselle. Hän pitää kymmenjärjestelmän vankkaa hallintaa merkittävänä tekijänä niin yksikönmuunnosten hallinnan kuin taitojen pysyvyydenkin kannalta. Oppilaat tarvitsevat muutamia pysyviä ankkureita, jotka helpottavat käsitteen ymmärrystä eikä oppiminen jäisi ulkoa opettelun varaan. (Ikäheimo 2012, 3, 77; 2015a, 1–2.) Käsitteenmuodostusvälineet, kuten kymmenjärjestelmävälineet tarjoavat konkreettisia keinoja ymmärtää mittayksiköitä ja niiden välisiä suhteita sekä yksikönmuunnoksia paremmin. Desimaalilukujen konkretisointi 10-järjestelmävälineillä ja desimaaliosilla auttavat hahmottamaan esimerkiksi, miksi luku 0,5 on sama kuin puoli ja miksi 0,125 on pienempi kuin 0,5, vaikka edellisessä on enemmän numeroita. (Korhonen 2013, 38).

Mittayksiköiden muunnoksissa tarvitaan erityisesti ymmärrystä lukujärjestelmästä, mittayksiköistä ja niiden välisistä suhteista. Näitä taitoja opitaan ympäristössä, jossa oppilas saa itse tavoitteellisesti kokeilla, tutkia ja rakentaa ymmärrystään mittaamisen käsitteestä vertailemisen ja ei-standardoitujen mittayksiköiden kautta kohti standardoituja mittayksiköitä. Mittaamiseen standardoiduilla mitoilla Ikäheimo suosittelee löytämään muistin tueksi tukipis-

teitä, jotka perustuvat oppilaiden omiin mittauksiin tai sopimuksiin. Esimerkiksi metrin tukipiste (yksi metri) on levitettyjen käsien välimatka, tikkarin paino on noin kymmenen grammaa eli yhden dekagramman, maitopurkin tilavuus on yksi litra tai kämmenen pinta-ala noin yksi neliödesimetri. (Ikäheimo 2012, 3, 76–86; 2015b, 1–23.) Näitä Ikäheimon kehittämiä mittayksiköiden tukipisteitä voidaan suoraan verrata Joramin (2003; Ks. myös Van de Walle 2014, 402) esittämiin kuvitteellisiin mittakappaleisiin eli vertailupisteisiin, joiden merkityksellisyys korostuu olennaisesti mittaamisprosessin oppimisessa.

4.5.1 Mittaaminen ja mittayksiköiden muunnokset alakoulun opetussuunnitelmassa sekä oppikirjojen merkitys opetuksessa

Peruopetuksen opetussuunnitelman (POPS 2014) mukaan vuosiluokilla 1–2 keskeisiä tavoitteita mittaamisen osalta on ohjata oppilasta ymmärtämään mittaamisen periaate. Kahdella ensimmäisellä vuosiluokalla tulee harjoitella mittaamista ja käsitellä keskeisimmät suureet, kuten pituus, massa, tilavuus ja aika. Lisäksi tulee käsitellä keskeisiä mittayksiköitä, kuten metri ja senttimetri, kilogramma ja gramma sekä litra ja desilitra. Kahden ensimmäisen vuosiluokan sisältöinä mittaamisen osalta on myös ohjata oppilaita käyttämään lukuja tarkoituksenmukaisesti mittaustulosten ilmaisemisessa. Opetussuunnitelma painottaa konkreettista ja toiminnallista oppimisympäristöä, jossa hyödynnetään välineitä ja vaihtelevia työtapoja. (Opetushallitus 2014, 129–130.) Valtakunnallinen opetussuunnitelma ei mainitse lainkaan epästandardien mittayksiköiden käyttöä, kun ne taas ovat Espoon kuntakohtaisessa opetussuunnitelmassa vahvasti esillä (http://webfronter.com/espoo/perusopetuksen_ops_2016/).

Opetussuunnitelman (POPS 2014) mukaan vuosiluokkien 3–6 keskeisenä tavoitteena mittaamisen osalta on ohjata oppilasta arvioimaan mittauskohteen suuruutta ja valitsemaan mittaamiseen sopivan välineen ja mittayksikön. Lisäksi tavoitteissa luonnehditaan, että oppilasta tulisi ohjata pohtimaan mittaustuloksen järkevyyttä. Sisällöissä tavoitteet on huomioitu niin, että tulee harjoitella mittaamista ja kiinnittää huomiota mittaustarkkuuteen, mittaustuloksen arviointiin sekä mittauksen tarkistamiseen. Oppilaita ohjataan ymmärtämään, miten mittayksikköjärjestelmä rakentuu sekä harjoitellaan yksikönmuunnoksia yleisemmin käytetyillä mittayksiköillä. Opetussuunnitelma painottaa myös vuosiluokilla 3–6 konkretisointia ja välineen käyttöä matematiikan opetuksessa. (Opetushallitus 2014, 236.) Espoon kuntakohtaisessa opetussuunnitelmassa painotetaan huomionkiinnittämistä mittayksiköiden ja

kymmenjärjestelmän yhteyteen, mitä ei erikseen valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa mainita. Lisäksi Espoon näkökulmassa korostuu monipuolisten ja omakohtaisten kokemusten merkitys. (http://webfronter.com/espoo/perusopetuksen_ops_2016/.)

Oppikirjojen ja opettajanoppaiden on havaittu ohjaavan vahvasti matematiikan opetuksen etenemistahtia ja oppituntien sisältöjä. Perkkilän (2002) tutkimuksessa ilmeni, että oppikirjojen asema näyttäytyi opetuksessa keskeisenä. Sen kahlitseva vaikutus aiheutti, että oppikirjojen tuomasta otteesta on vaikea irrottautua. Alkuopetuksessa oppikirjojen avulla toteutettu opetus näytti ottavan vahvan aseman toteutuvasta opetussuunnitelmasta. (Perkkilä 2002, 152–156; Ks. myös Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 138.) Mittaamisen käsite ja mittayksiköiden muunnoksiin tarvittava ymmärrys ei selkene, mikäli yksikönmuunnoksia tehdään vain oppikirjoihin (Ikäheimo 2012, 76). Ikäheimon (1997) mukaan oppikirjasidonnaisuudessa voi olla riski, että opetus ei tue riittävästi lapsen matemaattista ajattelua ja käsitteenmuodostusta. Vaarana on, että oppiminen jää pinnalliseksi ja ulkoa opettelun varaan, eikä lapselle anneta riittävästi aikaa lukukäsitteen monipuoliseen vahvistamiseen. (Ikäheimo 1997, 249.) Oppikirjojen sijaan konkreettinen tekeminen ja omakohtaiset kokemukset mahdollistavat käsitteen perusteellisen opettamisen ja antaa enemmän aikaa oppimiseen (Ikäheimo & Risku 2004, 228).

5 TUTKIMUKSEN TARKOITUS JA METODOLOGIA

5.1 Tutkimuksen tarkoitus ja tutkimustehtävä

Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää perusopetuksen kuudennen luokan oppilaiden kymmenjärjestelmätaitojen ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Suomalaislasten ja –nuorten matemaattiset taidot ovat pitkään olleet maailman tilastojen kärjessä. Viimeaikaisten tutkimusten valossa matematiikan osaamisen tasossa on tapahtunut huomattavaa heikentymistä. Kohdistamalla tutkimus juuri perusopetuksen kuudennen luokan oppilaiden matematiikan osaamisen tarkasteluun saadaan arvokasta tietoa yläkouluun siirtyvien oppilaiden taitotasosta, oppimisen ja opettamisen luonteesta. Kymmenjärjestelmän hallinta on merkittävä ja olennainen osa matematiikan perustan rakentumisessa. Kymmenjärjestelmätaitojen hallitseminen antaa vahvan pohjan laskuosaamiselle. Vahvat peruslaskutaidot ja matemaattisten käsitteiden ymmärtäminen tekevät taidoista pysyvämpiä ulkoa oppimisen sijaan. Koska kymmenjärjestelmän hallinnalla on vahva yhteys myös mittayksiöiden muunnosten osaamisen kanssa, tutkimukseni pureutuu näiden molempien osa-alueiden tarkastelemiseen.

Opetussuunnitelman perusteiden matematiikan hyvän osaamisen kriteerit vetoavat oppilaiden kymmenjärjestelmän hallintaan, ymmärtämiseen ja sen käyttämiseen varmasti. (Opetushallitus 2004; Opetushallitus 2014.) Kokemusten valossa oppilaiden kymmenjärjestelmän hallintaa, erityisesti desimaalilukujen ja mittayksiköiden muunnosten osalta ei osata riittävän hyvin (Ikäheimo 2012, 6; Korhonen 2013, 38–40). Näiden tietojen perusteella tutkimukseni tarkoitusperä kohdistuu hyvin merkittävään näkökulmaan, jonka selvittämisen merkitys korostuu erityisesti viimeaikaisten matematiikan oppimistulosten laskusuhdanteen kynnyksellä.

Tutkimus sijoittuu laadullisen tutkimuksen viitekehykseen, mutta siinä on elementtejä myös määrällisen tutkimuksen viitekehyksestä. Tutkimuksen määrällisessä osuudessa selvitetään kuudennen luokan oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten osaamista kolmen eri mittarin tulosten perusteella. Mittarien tulokset toimivat pohjana laadullisen aineiston käsittelyssä ja tulkinnassa. Määrällisen tutkimuksen kysymykset ovat rakentuneet seuraavasti:

1) Miten kuudennen luokan oppilaat hallitsevat kymmenjärjestelmää?
2) Miten kuudennen luokan oppilaat hallitsevat mittayksiköiden muunnoksia?

Päämenetelmä tutkimuksessa sijoittuu laadullisen tutkimuksen viitekehykseen, fenomenologiseen tutkimusmenetelmään. Tavoittelen tutkimuksella opettajien omakohtaisia ja ainutkertaisia kokemuksia oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Opettajien kokemuksista muotoutuneiden merkitysten kautta pyrin saamaan selityksiä tutkimuksen määrällisiin tuloksiin niin, että tutkittava ilmiö saisi laajempia ja moniulotteisimpia näkökulmia aiheesta. Tutkimuksen tarkoitus on tehdä näkyväksi, minkälaisena oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinta näyttäytyy opettajien kokemusmaailmassa. Opettajien kokemusten tutkiminen antaa myös mahdollisuuden ymmärtää paremmin määrällisen tutkimuksen kautta syntyneitä tuloksia oppilaiden matematiikan taitotasosta. Laadullisen tutkimuksen kysymykset ovat rakentuneet seuraavasti:

3) Millaisia kokemuksia opettajilla on kuudesluokkalaisten kymmenjärjestelmätaitojen hallinnasta?
4) Millaisia kokemuksia opettajilla on kuudesluokkalaisten mittayksiköiden muunnosten hallinnasta?

5.2 Tutkimuksen metodologiset lähtökohdat

5.2.1 Tutkimuksen lähestymistapa

Tutkimuksessa on käytetty sekä määrällisen että laadullisen tutkimuksen tutkimusmenetelmiä. Tätä tapaa kutsutaan monimenetelmälliseksi tutkimukseksi (mixed methods research). (Creswell & Plano Clark 2011, 5.) Olen valinnut tämän tyyppisen tutkimustavan, koska tällä tavalla on mahdollista yhdistää molempien tutkimusmenetelmien hyvät puolet samassa tutkimuksessa. On vallinnut pitkään yleinen käsitys, että kvantitatiivista- eli määrällistä tutkimusta ja kvalitatiivista- eli laadullista tutkimusta ei tulisi käyttää samassa tutkimuksessa. Nykyään ollaan kuitenkin sitä mieltä, että tutkimustavat edustavat lähinnä eri tiedonkeruumenetelmiä, eikä niinkään kahta eri epistemologista näkemystä. Etenkin monimenetelmällinen tutkimus on hyväksyttävää, jos eri lähestymistapojen yhdistäminen tarkoittaa niiden parhaiden piirteiden hyväksi käyttämistä niille soveltuvissa paikoissa. (Hirsjärvi & Hurme 2000, 26 – 33.)

Tässä tutkimuksessa määrällistä tutkimusta edustaa kolmen eri mittarin eli tutkimuksessa käytettyjen kartoitusten tulokset oppilaiden kymmenjärjestelmätaitojen ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Monimenetelmällistä tutkimusta on hyvä käyttää silloin, kun yhden

tutkimuksen tulokset ovat riittämättömiä tai kun tuloksia halutaan selittää ja syventää laajemmaksi. Myös silloin kun tutkimuksen kannalta on parempi tehdä tutkimus useammassa vaiheessa, on mahdollista käyttää monimenetelmällistä tutkimusta. (Creswell & Plano Clark 2011, 5–8.) Tässä tutkimuksessa saatiin määrällisellä tutkimuksella suuntaa antavia tuloksia oppilaiden taitotasosta ja matemaattisen osaamisen luonteesta. Koska halusin saada tarkempia ja syvällisempiä merkityksiä oppilaiden taitotasosta, oppimisen ja opettamisen luonteesta osoittautuivat opettajien ainutlaatuisten kokemusten ja niistä muotoutuneiden merkitysten tutkiminen pääosaksi tutkimustani.

Monimenetelmällisellä tutkimuksella on useita hyviä puolia verrattuna yksimenetelmälliseen tutkimukseen. Yleinen kannanotto monimenetelmällisen tutkimuksen käyttöön on ollut se, että se kompensoi niin kvalitatiivisen kuin kvantitatiivisenkin tutkimuksenkin huonoja puolia. Tämän lisäksi monimenetelmällisessä tutkimuksessa on mahdollista saada laajemmin tuloksia käytettäväksi kuin yhtä menetelmää käyttäen. Monimenetelmällisessä tutkimuksessa voidaan siis valita vapaasti sellaiset tutkimustavat jotka parhaiten vastaavat tutkimusongelmia. (Creswell & Plano Clark 2011, 12–13.) Monimenetelmällisellä tutkimuksella on myös haittapuolensa. Monimenetelmällinen tutkimus on työläämpi ja aikaa vievämpi kuin pelkkä kvalitatiivinen tai kvantitatiivinen tutkielma (Hirsjärvi & Hurme 2000, 33). Monimenetelmällinen tutkimus luo haasteen myös siinä, että tutkijan on tunnettava molempien, kvalitatiivisen tutkimuksen ja kvantitatiivisen tutkimuksen tutkimus- ja analysointitavat (Creswell & Plano Clark 2011, 13). Tämän olen myös itse huomannut tutkimusta tehdessäni. Tässä tutkimuksessa olen tietoisesti asettanut määrällisen tutkimusosuuden pienempään rooliin, jolloin laadullinen tutkimus nousee keskeiseksi osaksi tutkimustani.

Valitsin laadullisen tutkimukseni lähtökohdaksi fenomenologian, koska tavoittelen tutkijana opettajien ainutkertaisia kokemuksia ja niistä muotoutuvia merkityksiä tutkittavasta ilmiöstä. Opettajat ovat siinä opetustyössä ja vuorovaikutuksessa oppilaiden kanssa jatkuvassa suhteessa oman todellisuutensa kanssa. Tutkimuksessa tutkitaan siis samalla opettajien suhdetta omaan elämistodellisuuteen. Laineen (2007, 29) mukaan fenomenologisessa tutkimuksessa kaikki merkitsee yksilölle jotakin, joten kokemus muotoutuu näiden merkitysnäkökulmien mukaisesti. Tutkimuksessa opettajien kokemukset ovat syntyneet siinä arkipäivän elämismaailmassa, jossa he elävät. Tarkastelun kohteena ovat opettajien omat yksilölliset kokemukset ja merkitykset oppilaiden kymmenjärjestelmätaitojen ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Perttula (2008) tähdentää, että kokemus on ihmisen tajunnallinen tapa

merkityksellistää niitä todellisuuksia, joihin hän on suhteessa. Hän jatkaa edelleen, että kokemus on sitä, mitä elämäntilanne eli todellisuus ihmiselle tarkoittaa. Kokemus on elävä, koska se kuvastaa tajunnallisuuden tapaa suuntautua oman toimintansa ulkopuolelle (Perttula 2008, 137, 149).

Tutkimuksessa käytetty määrällinen aineisto ja mittarien tulokset oppilaiden taitotasosta toimivat pohjana, joiden kautta opettajat lähtevät jäsentämään omia kokemuksiaan tutkittavasta ilmiöstä. Tutkimuksessa opettajien kokemuksia lähestytään merkitysten kautta. Jokaisen tutkittavan kokemus on omalla ainutkertaisella merkityksellään ladattua, mutta niissä on yhteisöllisiä ja toisiaan yhdistäviäkin piirteitä Tutkimuksen varsinaisena kiinnostuksen kohteena ovat juuri nuo merkitykset. Jokaisella opettajalla on syntynyt oma, ainutkertainen merkitys kokemuksestaan oppilaiden kymmenjärjestelmätaitoihin ja mittayksiköiden muunnoksiin liittyen. Pyrin tulkitsemaan opettajien kokemuksia sellaisenaan kuin ne heille itselle ilmenevät heidän elämässään, arjessaan ja siinä elämismaailmassaan. Laineen (2007) mukaan kokemus syntyy vuorovaikutuksessa sen todellisuuden kanssa, jossa ihminen elää. Fenomenologinen tutkimus keskittyy kokemuksen tutkimiseen, mutta koska ihmisen suhde maailmaan on hyvin intentionaalinen ja ilmiöillä on aina jokin merkitys yksilölle. Näin ollen kokemus muotoutuu näiden merkitysten mukaisesti. (Laine 2007, 29.)

Fenomenologisen tutkimuksen keskeisiä piirteitä on pyrkiä deskriptiivisyyteen, koettujen ilmiöiden tavoittamiseen sellaisena kuin se välittömästi ilmenee. Fenomenologisessa tutkimuksessa pyritään reduktion avulla, ts. pyritään menetelmällisesti minimoimaan tekijät, jotka estävät tutkittavana olevan ilmiön hahmottumista mahdollisimman alkuperäisenä ja rikkaana. (Perttula 1995, 43.) Olen pyrkinyt kurinomaisesti tavoittamaan opettajien kokemukset mahdollisimman alkuperäisessä muodossa. Tutkimuksessa opettajien kokemusten tavoittaminen ja kokemuksiin sisältyvien merkitysten lähestyminen edellyttävät kuitenkin tulkintaa ja ymmärtämistä. Laineen (2007, 31) mukaan merkityksiä voidaan lähestyä vain tulkitsemalla ja ymmärtämällä. Näin ollen tähänkin tutkimukseen sisältyy myös hermeneuttinen ulottuvuus. Ymmärtäminen on edellytys kokemusten muodostumiselle ja niiden tutkimiselle. Merkityksiä voidaan jo sinällään pitää tulkintoina. Tulkinta on olemassa jo ihmisen ontologisessa perusrakenteessa. (Perttula 2008, 116–120.) Vaikka pyrin tutkimuksessa kurinalaisesti koettujen ilmiöiden kuvaamiseen deskriptiivisesti, opettajien merkityksillä ladatut ilmaisut ja niiden ymmärtäminen vaativat sinällään jo tulkintaa.

Laadullisen tutkimukseni teoreettiset lähtökohdat nojaavat kaiken kaikkiaan deskriptiivistä ja hermeneuttista fenomenologiaa yhdistävään eksistentiaaliseen fenomenologiaan. Empiiristä tutkimusta tekevä tutkija työskentelee kuvatakseen tutkittavan ilmiön fenomenologisesti, tietäen tavoitteensa ehdottomassa mielessä mahdottomaksi. Fenomenologisessa metodissa pyritään tiedostamaan ja hallitsemaan tutkimustyöhön työntyvää tulkinnallisuutta. Tulkinnallisuuden hallitseminen on tutkijan avautumista ilmiölle, pyrkimystä olla sulkeutumatta jo tietämiinsä yksilöllisiin ja kulttuurisiin käsityksiin maailmasta. Perttula on soveltanut Lauri Rauhalan filosofian ja tunnetun modernin fenomenologin Amadeo Giorgin empiiriset metodiset käsitteen yhteen, jonka tuloksena on syntynyt spesifi fenomenologinen metodi. (Perttula 2000, 429.) Tässä tutkimuksessa käsitän fenomenologian lähestymistapana, joka ohjaa kaikkia tutkimusvaiheitani, aina oman ymmärtämisen ja tulkinnan arviointia, tiedonkeruuta ja analyysiä silmällä pitäen.

Tutkimuksen ensimmäisessä osassa syntyy tutkimukseen osallistuneiden opettajien yksilökohtaiset merkitysverkostot, joista myös tutkimuksen koko yleinen osa on johdettu. Fenomenologisen analyysin toisessa osassa edetään yksilökohtaisesta tiedosta yleiseen tietoon. Yleinen tieto on enemmän tutkijan konstruoimaa kuin yksilökohtainen tieto. Tämä näkyy myös tässä tutkimuksessa. Deskriptiivisyys näyttäytyy koko ajan läsnä tutkimuksessani, sillä tutkimus ei ole fenomenologista, jos metodi ei anna tutkittavalle ilmiölle mahdollisuutta asettua nähtäväksi. Yleisen tiedon on oltava kattavaa sisältäen kaikki yksilökohtaisesti olennaiset tiedot. Yleisen tiedon analyysi säilyttää välittömän yhteyden yksilökohtaiseen tietoon ja yksilökohtaisiin merkitysverkostoihin. (Perttula 2000, 430–431). Olen pyrkinyt tähän huolehtimalla systemaattisesta yhteydenpidosta yksilökohtaisuuden ja yleisen tiedon välillä.

5.2.2 Tutkijan esiymmärrys ja sulkeistaminen

Fenomenologisesta tutkimusmetodista ei ole mahdollista esittää tarkkaa kuvausta. Metodi tarkoittaa enemmänkin ajattelutapaa ja tutkimusotetta, ei niinkään aineiston käsittelytapaa. Tutkijan, tutkittavan ja tilanteen erityislaatuisuus muodostavat koko tutkimukselle muotonsa. Tutkijan tulee aika ajoin olla kriittinen ja reflektiivinen omaa tutkimustaan kohtaan. Oman ihmiskäsityksen tai ennakkoluulojen tunnistaminen mahdollistavat tarkkailemaan niiden vaikutusta tutkijan tulkintoihin. Tutkimuskohdetta ennakolta selvittävien teoreettisten mallien tiedostaminen on fenomenologiassa erityisen merkityksellistä. Reflektio mahdollistaa tällaisten ennakkonäkemysten tunnistamisen. (Laine 2007, 33–36.) Perttulan (1995, 69)

mukaan ennakkokäsitykset tulee asettaa tutkimuksen ajaksi sivuun, jotta tutkija pystyy kohtaamaan tutkimusaineiston sellaisena, kuin se hänelle siinä hetkessä näyttäytyy.

Fenomenologinen tutkimus pyrkiikin yleistyksen sijaan ymmärtämään johonkin tutkittavaan ilmiöön kuuluvien ihmisten sen hetkistä merkitysmaailmaa. Metodin keskeiseksi elementiksi kokemusten auki kerimiseksi osoittautuu fenomenologinen reduktio. Reduktio tapahtuu sulkeistamisen ja mielikuvatasolla tapahtuvan muuntelun avulla. Fenomenologinen reduktiossa tutkija pyrkii irtautumaan luonnollisesta asenteestaan ja eläytymään tutkittavan kokemukseen sellaisenaan sulkeistamisen avulla. Mielikuvatasolla tapahtuvassa muuntelussa tutkija pohtii, mitä merkityssisältöjä muuttamalla kokemus lakkaa olemasta sitä, mitä se on. Siten löytyvät ne merkitykset, jotka kokemukseen on sisällyttävä, jotta se on juuri kyseinen kokemus. Tavoitteena on löytää tutkittavan kokemuksen keskeinen ja riittävä ydin. Metodisten menettelytapojen avulla pyritään minimoimaan tutkijan teoreettisten ja henkilökohtaisten ymmärtämisyhteyksien vaikutusta tapaan, jolla tutkittavan kokemus hänelle ilmenee. (Perttula 1995, 45–46, 69.) Tämä tarkoitti konkreettisesti tutkimuksessani systemaattista reflektointia ja itsekriittistä pohdiskelua niin, että pyrin kyseenalaistamaan ja tarkkailemaan omien tulkintojeni vaikutusta opettajien ainutkertaisiin kokemuksiin ja merkitysaspekteihin. Sulkeistaminen on tutkijan tavoitteena, mutta siinä onnistuminen on eksistentiaalisen fenomenologian näkökulmasta rajallista, koska tutkimus on aina myös esiymmärtäneisyyttä (Lehtomaa 2008, 165).

Tutkija voi vahvistaa sulkeistamista muun muassa kirjaamalla ylös reflektion avulla hahmottuneet etukäteisolettamuksensa tutkittavasta ilmiöstä. Fenomenologinen lähestymistapa edellyttää esiymmärryksen esille tuomista. Esiymmärryksen erittelyllä tuodaan esille sitä, kuinka tutkija on ennen tutkimuksen toteutusta ymmärtänyt tutkimuskohteensa. Mitään tutkimusta ei voida pitää fenomenologisena, jos reduktiota ei ole käytetty ja tehty näkyväksi. Tutkijan tulee välttää hahmottamasta tutkimusaineistoa teoreettisesti latautuneiden tapojen kautta. Näin ollen tutkijan tulee pyrkiä saavuttamaan toisen kokemus sellaisenaan niin, että pystyy eriyttämään oman kokemuksen toisen ihmisen kokemuksesta. (Perttula 1995, 69–71).

Tässä tutkimuksessa sulkeistaminen käynnistyi niin, että pohdin huolellisesti ensin omaa esiymmärrystäni ja etukäteisoletuksiani tutkittavasta ilmiöstä ennen kuin ryhdyin tutkimustyöhön ja aineiston analyysiin. Kirjasin konkreettisesti ylös etukäteisolettamukseni aiheesta ennen empiirisen tutkimusprosessin aloittamista. Lisäksi sulkeistaminen tarkoitti minulle

jatkuvaa itsekriittistä pohdiskelua. Tämän jälkeen pyrin siirtämään oletukset ja ennakkoluulot syrjään koko tutkimuksen ajaksi. Tutkimusprosessissa pyrin etenemään kaikissa vaiheissa aineistolähtöisesti varoen teoreettisten mallien ja etukäteisoletusten ohjaavan tutkimusaineistoa, jotta opettajien ainutlaatuiset ja välittömät kokemukset tulisivat saavutetuksi. Kriittinen asenne ja pääseminen irti omista pinttyneistä tavoistani ymmärtää kohdetta osoittautuivat äärimmäisen tärkeäksi tutkimusprosessia, mutta toisaalta myös vaativaksi työksi. Perttulan (1995, 70) mukaan tutkija voi perehtyä luonnollisesti teoreettisiin lähtökohtiin myös ennen tutkimusaineiston analyysin aloittamista, jos kokee tämän helpottavan tiedostamaan omia ennakkokäsityksiä.

Sulkeistaminen tarkoitti työssäni jatkuvaa pohdintaa siitä, että opettajien kokemukset syntyivät aidosti tutkimusaineistosta, eikä omien mieltymysteni tai teoreettiseen tietoon vedoten. Fenomenologisen reduktio vaati työssäni tutkimusaineiston kokonaisnäkemyksen hallintaa. Mielikuvatasolla tapahtuva muuntelu tarkoitti mielessäni tapahtuvaa prosessia, jossa pyrin muuntelemaan erilaisia merkitysyhdistelmiä etsien juuri opettajien kokemusten ja tutkittavan ilmiön edellyttämät merkitykset. Muodostaessani tutkimuksen aineistosta syntyviä sisältöalueita omien ennakkoasenteiden tarkkaileminen osoittautui hyvinkin merkitykselliseksi. Reduktiota helpotti se, että irtaannuin täysin kaikesta teoriatiedon ja tutkimuskohdetta kuvaavien aiempien tutkimustulosten hankkimisesta hyvissä ajoin jo ennen aineistonkeruun aloittamista. Kutsuin nämä tiedot ja näkemykset esiin vasta aineiston analyysin jälkeen aineiston tulkinnan yhteydessä. Sulkeistaminen tarkoitti tutkimusasenteellista näkökulmaa, joka kulki mukana tutkimuksen alusta aivan tutkimuksen loppuun saakka. Lehtomaan (2008, 166) mukaan sulkeistamisen vaatimus kulkee koko tutkimuksen ajan, koska tutkijan ymmärrys tutkimastaan ilmiöstä muuntuu tutkimuksen aikanakin.

Fenomenologisen ilmiön tutkiminen edellyttää hyvin kurinalaista metodia. Tiedon yleistäminen ei ole perusteltua ilman fenomenologista reduktiota, joten tutkijan tulee olla hyväksymättä omia ennakko-oletuksiaan. Toisaalta tutkijan tulee luottaa myös omaan intuitioon. Fenomenologinen tutkimus lukee tekstimuotoista tutkimusaineistoa kuvauksena tutkittavien omakohtaisesta koetusta maailmasta. (Perttula 2000, 429, 440.) Perttulan (1995, 71) mukaan fenomenologisen tutkimuksen luotettavuuden spesifit kriteerit tiivistyvät siinä, miten hyvin tutkija kykenee ennakkokäsityksensä sulkeistamiseen ja miten systemaattisesti hän mielikuvatasolla muuntelee merkityksen sisältäviä yksiköitä. Tietoinen heittäytyminen irti omista ennakkoluuloista ja kriittinen suhtautuminen spontaanin ymmärryksen kyseenalaistamiselle

ovat vaatineet siis huolellista ja perustavanlaatuista prosessia, mutta toisaalta myös helpottanut kipuamista tutkimuksen tasolle ja antanut mahdollisuuksia eläytyä tutkittavien ainutkertaisiin kokemuksiin.

5.3 Tutkimusaineisto ja sen kerääminen

5.3.1 Tutkimusjoukko

Tutkimuksen toteuttaminen alkoi kohderyhmän valinnalla. Tutkimuksen aiheen ja metodologisten näkökulmien täsmennyttyä otin yhteyttä erään Pohjois-Pohjanmaan kunnan sivistystoimenjohtajaan. Häneltä sain kirjallisen luvan tehdä tutkimusta yhdessä kunnan kouluista. (Liite 1 ja Liite 2). Kohderyhmäksi valikoitunut koulu oli tullut minulle aikaisempien työkokemusten myötä tutuksi, joten koin luontevaksi ottaa ensin yhteyttä sinne. Sivistystoimenjohtajalta saamani luvan jälkeen otin yhteyttä valitun koulun rehtoriin, jonka toimesta järjestettiin neuvottelu tutkimuksen toteuttamisen pääpiirteistä. Rehtorin ja tutkimukseen haluttujen opettajien suostumusten jälkeen oli vuorossa tutkimukseen osallistuvien oppilaiden vanhempien luvansaaminen. (Liite 3). Lupa-asioiden järjestyttyä alkoi varsinainen aineistonkeruu, joka oli kaksiosainen tutkimuksen monimenetelmällisyydestä johtuen.

Määrällinen aineisto käsitteli kolmen eri mittarin tulosten tarkastelua kuudennen luokan oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Tutkimusjoukko koostui valikoituneen koulun kuudennen luokan oppilaista, joita kaikkiaan oli neljä luokkaa. Kaikkiaan 81 oppilasta tekivät tutkimukseen liittyneet kartoitukset. Kuusi oppilasta ei saanut lupaa osallistua tutkimukseen, joten tutkimukseen osallistui lopulta yhteensä 75 oppilasta. Määrällinen aineisto kerättiin alkukeväästä 2016. Kohderyhmäksi valikoituivat juuri kuudesluokkalaiset, koska näin saadaan tärkeää ja arvokasta tietoa juuri yläkouluun siirtyvien oppilaiden matemaattisesta taitotasosta, oppimisesta ja sen luonteesta.

Laadullinen aineisto koostui kyseisten luokkien opettajien haastatteluista. Haastattelut toteutettiin helmi-maaliskuussa 2016, heti määrällisen aineiston tarkastamisen ja siitä saatujen tutkimustulosten jälkeen. Opettajia haastatteluihin osallistui yhteensä neljä. Opettajista kolme on kyseisten oppilaiden luokanopettajia ja yksi opettajista oli koulun erityisopettaja. Yksi luokanopettajista estyi osallistumasta tutkimukseen.

5.3.2 Määrällinen aineisto ja mittarit

Tutkimukseni määrällisen osion lähtökohtana on selvittää kuudennen luokan oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Tutkimukseni määrällinen aineisto rakentuu kolmen mittarin (mittari 1, mittari 2, mittari 3) tulosten tarkasteluun. Mittari 1 on Ikäheimon (2011) kehittelemä Kymppi-kartoitus 2. Tämän avulla kartoitettiin tutkimukseen osallistuneiden kuudennen luokan oppilaiden (N=75) kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Kymppi-kartoitus 2 sisältää yhdeksän eri osa-aluetta käsittelevää tehtävää kymmenjärjestelmään ja mittayksiköiden muunnoksiin liittyen. Kartoituksen maksimipistemäärä on 70 (ks. Liite 4). Tutkimuksen mittari 2 on Ikäheimon (2016) kehittelemä Mittayksikkö-kartoitus 1. Mittarilla 2 kartoitettiin tutkimukseen osallistuneiden kuudennen luokan oppilaiden (N=75) mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Mittari 2 sisältää kolme eri tehtävää liittyen pituuden, massan ja litratilavuuden yksiköihin, joiden peräkkäisten yksiköiden välinen suhdeluku on 10. Maksimipistemäärä on 30 (ks. Liite 5). Mittari 3 on Ikäheimon (2016) kehittelemä Mittayksikkö-kartoitus 2. Mittarilla 3 kartoitettiin pinta-alan, kuutiotilavuuden ja litratilavuuden yksiköiden hallintaa. Erityisesti haluttiin selvittää, miten oppilaat hallitsevat peräkkäisten yksiköiden välisiä suhdelukuja, jotka ovat pinta-alan yksiköissä 100, kuutiotilavuuden yksiköissä 1000 ja litratilavuuksien yksiköissä 10. Mittari 3 sisältää kolme eri tehtävää liittyen pinta-alaan ja tilavuuteen sekä kuutioina että litroina. Maksimipistemäärä on 20 (ks. Liite 6).

Ikäheimo (2016) on määritellyt 3 tasoa mittarissa 2 ja mittarissa 3 seuraavan taulukon mukaisesti:

Taulukko 3. Pisterajataulukko mittarissa 2 ja 3

Mittarin 2 pisterajat			
A-taso	**B-taso**	**C-taso**	**Maksimi**
0 – 15 p	16 – 27 p	28 – 30 p	30 p

Mittarin 3 pisterajat			
A-taso	**B-taso**	**C-taso**	**Maksimi**
0 – 10 p	11 – 17 p	18 – 20 p	20 p

Mittarissa 2 (eli Mittayksikkö-kartoitus 1:ssä) sallitaan korkeintaan kaksi virhepistettä, jolloin oppilaat sijoittuvat C-tason ryhmään ja jos oppilailla on yli puolet oikein, he sijoittuvat

B-tason ryhmään. A-tason ryhmään jäävät oppilaat, jotka saavat kokonaispistemäärästä korkeintaan puolet. Tavoitteena on, että oppilaat hallitsevat pituuden, massan ja litratilavuuksien yksiköiden muunnoksia ymmärtäen ja mahdollisimman hyvin jo viidennellä ja kuudennella luokalla. Myös mittarissa 3 (Mittayksikkö-kartoitus 2:ssa) sallitaan korkeintaan kaksi virhepistettä, jolloin oppilaat sijoittuvat C-tason ryhmään ja kun oppilailla on yli puolet kokonaispistemäärästä, he sijoittuvat B-tason ryhmään. A-tason ryhmään jäävät oppilaat, jotka saavat kokonaispistemäärästä korkeintaan puolet. Tavoitteena on, että oppilaat hallitsevat pinta-aloihin sekä kuutiotilavuuksiin ja litratilavuuksiin liittyviä yksiköiden muunnoksia mahdollisimman hyvin jo kuudennella luokalla. Oppilaat jaetaan edellä mainittuihin kolmeen taitotason mukaiseen ryhmään ennen kuin ryhdytään suunnittelemaan korjaavia toimenpiteitä. (Ikäheimo 2016.)

Kartoitin kolmella mittarilla oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa alkukeväästä 2016. Mittarit 1 ja 2 eli Kymppi-kartoitus 2 ja Mittayksikkö-kartoitus 1 toteutettiin kahden päivän aikana, kahdella peräkkäisellä oppitunnilla. Mittari 3 eli Mittayksikkö-kartoitus 2 toteutettiin tästä noin viikkoa myöhemmin. Ennen määrällisen aineiston toteuttamista opettajat olivat saaneet tietoa tutkimusaineiston menettelytavoista ja toteuttamisesta. Luotettaviin ja paikkaansa pitäviin tutkimustuloksiin vedoten opettajille ei annettu etukäteen tutkimuksessa käytettyjen mittarien tehtävälomakkeita. Opettajat olivat tiedottaneet oppilaita tutkimuksesta, sen kulusta ja tutkimukseen liittyvien mittareiden suorittamisesta. Opettajat olivat tutkijan mukana suoritustilanteessa. Oppilaat tekivät tutkimukseen valitut tehtävät heidän omassa luokkahuoneessaan. Ohjeistus käytiin huolellisesti yhdessä läpi ja oppilaat saivat esittää kysymyksiä heille epäselviin kohtiin. Aikarajaa mittarien suorittamiseen ei asetettu, mutta jokainen merkitsi tehtävälomakkeeseen aloitus- ja lopetusajan. Tilastollista jälkikäsittelyä varten muodostin aineistosta matriisin.

5.3.3 Laadullinen aineisto ja fenomenologinen tutkimushaastattelu

Tutkimuksen laadullinen aineisto koostuu tutkimukseen osallistuneen koulun kuudennen luokan oppilaiden kolmen luokanopettajan ja yhden erityisopettajan haastattelusta. Yhden luokanopettajan estyessä osallistumasta tutkimukseen, päätin pyytää mukaan myös koulun erityisopettajan. Oli mielekästä valita tutkittaviksi juuri kyseisten oppilaiden opettajat, koska laadullinen aineisto pohjautuu osittain määrällisen aineiston tuloksiin oppilaiden taitota-

sosta. Opettajat valikoituivat tutkimukseen myös siksi, että jokaisen opettajan elämäntilanteensa oli minulle kiinnostava. Jokainen opettaja oli omalla, ainutkertaisella kokemuksellaan varustettu. Jokaisella opettajalla oli kertynyt vuosien kokemus opettajan työstä ja heillä oli omakohtaisia eläviä kokemuksia tutkittavasta ilmiöstä. Tutkittavien kokemukset ilmiöstä olivat siinä elämäntilanteessa muotoutuneet sellaisiksi merkityksellisiksi kokemuksiksi, joita halusin ehdottomasti ymmärtää ja tehdä näkyväksi. Lisäksi kyseiset opettajat olivat halukkaita kuvaamaan kokemuksiaan tutkijalle, mikä on fenomenologiselle tutkimukselle välttämätöntä (Perttula 2008, 137).

Ennen haastatteluihin siirtymistä olin kerännyt määrällisen aineiston. Jokaisesta oppilaasta oli laadittu mittarien perusteella yhteenveto kymmenjärjestelmätaitojen ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Lähetin ennen haastatteluja opettajille myös ennakkokirjeen sähköpostilla, jonka tarkoituksena oli kertoa vielä tarkemmin haastattelun luonteesta, aihepiiristä ja toteutustavasta. Opettajat myös toivoivat ennakkokirjettä, jotta pystyisivät paremmin orientoitumaan haastattelun kulkuun. Lehtomaan (2008, 169–70) mukaan tutkijan on oltava rehellinen haastateltaville ja kerrottava avoimesti, mistä tutkimuksessa on kyse ja minkälaiset kokemukset tutkijaa kiinnostavat.

Fenomenologisen tutkimusaineiston tärkeänä ehtona on, että tutkija vaikuttaa mahdollisimman vähän tutkittavan kokemuksiin. Tästä johtuen tutkimustilanne on järjestettävä siten, että tutkittavat voivat vapaasti kuvat juuri niitä kokemuksiaan, joita ovat arkipäivän elämässään kokeneet. (Perttula 1995, 65.) Tutkimuksessa opettajat valitsivat tätä päämäärää tietäen itselle sopivan, rauhallisen ja tutun haastattelupaikan koulun sisältä. Toinen tärkeä periaate aineiston hankinnalle liittyy kysymysten laatuun. Kokemuksen tutkija tekee haastattelun tilanteesta sellaisen, että haastateltavan on helppo kuvata yksityiskohtaisia ja yksilöllisiä kokemuksiaan. Tämä tarkoittaa kysymysten avoimuutta ja strukturoimattomuutta niin, että kysymys antaa tilaa tutkittavan mielikuville ja elämyksille. (Perttula 1995, 66–67.) Haastattelu muistutti enemmän avointa ja keskustelunomaista tilannetta, joka eteni pitkälti haastateltavan ehdoilla.

Haastattelu muodostui kaksivaiheiseksi. Ensimmäisessä vaiheessa kävimme läpi oppilas- ja luokkakohtaisesti kolmen mittarin antamat tulokset oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Haastattelun toinen vaihe eteni avoimien kysymysten asettelun mukaisesti, jossa haastateltavat saivat mahdollisimman paljon tilaa kokemuksilleen ja mielikuvilleen. Lehtomaan (2008, 170) mukaan haastattelijalla on avoimessakin

haastattelussa lupa ohjata tutkittavia kuvaamaan kokemuksiaan, jotka liittyvät juuri tutkijaa kiinnostaviin ulottuvuuksiin. Tutkija kuitenkin ohjaa mahdollisimman vähän kokemuksia, joita tutkittavat tuovat esille (Perttula 1995, 65). Kysymysasettelu oli kuvaileva niin, että tutkittavia pyydettiin kuvailemaan elävästi heidän elämäntilanteessa ilmeneviä kokemuksiaan tutkittavasta ilmiöstä. Haastattelun teemat ja aiheet nojautuivat kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten oppimisen ja opettamisen näkökulmiin.

6 TUTKIMUKSEN ANALYYSI JA TULOKSET

6.1 Määrällisen tutkimusaineiston analyysi ja tulokset

6.1.1 Määrällisen aineiston analysointi

Tämän tutkimuksen mittareiden tulosten käsittelyyn on käytetty kvantitatiivisia tutkimusmenetelmiä. Tutkimuksessa pyritään selvittämään tilastollisin menetelmin, miten oppilaat hallitsevat kymmenjärjestelmää ja mittayksiköiden muunnoksia. Yksinkertaistettuna tilastollisessa tutkimuksessa aineistoa käsitellään matemaattisten toimenpiteiden avulla. Tietokoneohjelmisto suorittaa laskutoimitukset, mutta tutkijan tehtävänä on tulkita ja ymmärtää tuloksia monipuolisesti. Tilastotiede toimii apuna kvantitatiivisen aineiston käsittelyssä ja tulosten esittelyssä. Tilastollinen tutkimus edustaa empiiristä tutkimustapaa, jossa yksittäistapausten pohjalta on tarkoitus löytää yleisiä säännönmukaisuuksia. (Valli 2015, 15–16.) Ensimmäiseksi määrällinen aineisto siirrettiin Exceliin, jonka jälkeen aineisto oli valmis siirrettäväksi tilastolliseen tarkasteluun SPSS -ohjelmistoa (IBM SPSS Statistics 22) hyödyntäen. Näin ohjelmistoon muodostui tutkimusaineistosta matriisi tilastollista jälkikäsittelyä varten.

Aineisto analysoitiin käyttämällä yksiulotteisen jakauman tunnuslukuja (frekvenssit, prosentit, keskiarvot ja keskihajonta). Havainnollisuuden vuoksi summamuuttujien jakaumista tehtiin myös histogrammit. Tehtäväkohtaiset ratkaisuprosentit havainnollistettiin pylväskuvion avulla. Aineistosta tarkasteltiin myös oppilaiden tekemiä tyypillisiä virheitä. Mittarien 1 ja 2 tulosten välistä yhteyttä tarkasteltiin käyttämällä korrelaatiodiagrammeja ja korrelaatiokertoimia sekä niiden merkitsevyystausta. Samalla tavalla tutkittiin myös oppilaiden mittariin 1 käytetyn ajan ja sen yhteispistemäärän välistä yhteyttä.

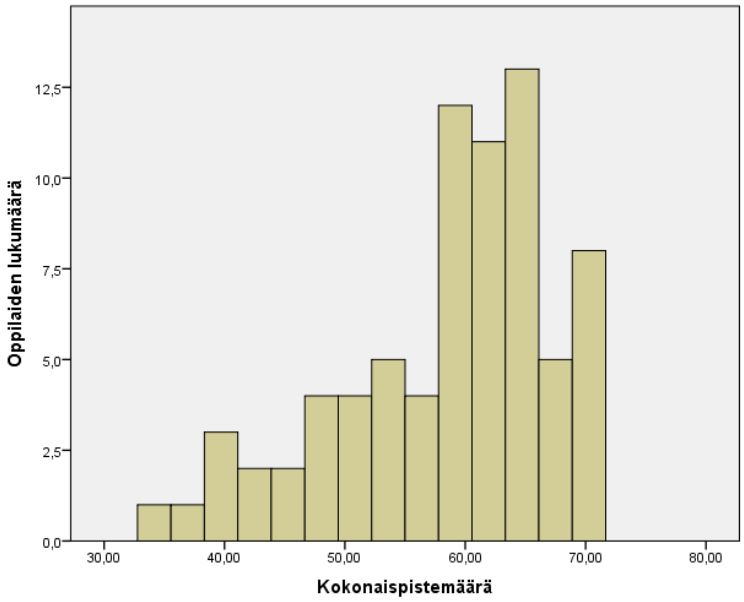
6.1.2 Määrällisen tutkimuksen tulokset

Miten kuudennen luokan oppilaat hallitsevat kymmenjärjestelmää?

Oppilaiden mittarissa 1 (eli Kymppi-kartoituksessa 2) saamien tehtäväpistemäärien jakautumista on kuvattu taulukon 4 mukaisesti (Liite 7). Tehtäväkohtaiset pistemäärät painottuvat

lähelle maksimipistemäärää. Mittarin 1 tehtävät sisältävät niin keskeisiä luonnollisten lukujen ja desimaalilukujen käsitteisiin liittyviä tehtäviä, laskutoimituksia sekä mittayksiköiden muunnoksia, joita kuudesluokkalaisten tulisi hallita täysin (Ikäheimo 2012, 111). Tehtävä-pistemäärien painottuminen lähelle maksimipisteitä ei ole siten yllättävää. Kuitenkin kaikissa tehtävissä on käynyt niin, että löytyy oppilaita, joilla on hyvin pieniä pistemääriä. Koska tavoitteena on, että kaikki oppilaat osaavat tehtävät täysin virheittä, kymmenjärjestelmän hallinnassa on nähtävissä huomattavia puutteita. Ikäheimon (2015a, 7) mukaan jokaiseen virheeseen on suhtauduttava vakavasti riippumatta oppilaiden saamasta kokonaispistemäärästä, sillä pienetkin puutteet niiden hallinnassa vaikeuttavat oppilaiden matematiikan oppimista jatkossa. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 6. vuosiluokan matematiikan hyvän osaamisen kriteereissä todetaan, että oppilas hallitsee kymmenjärjestelmän periaatteen myös desimaalilukujen osalta (Opetushallitus 2014, 238).

Oppilaiden mittarissa 1 saamien kokonaispistemäärien jakautumista on havainnollistettu seuraavan kuvion 2 mukaisesti.

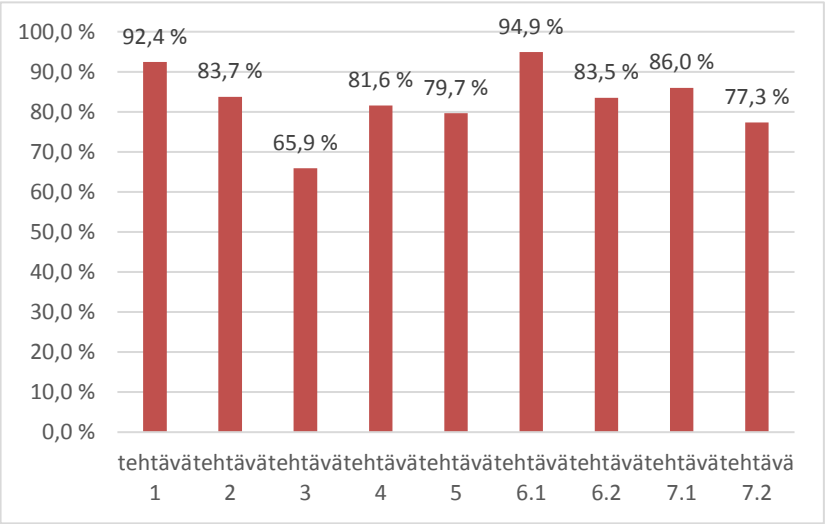


Kuvio 2. Mittarin 1:n (eli Kymppi-kartoitus 2:n) kokonaispistemäärän jakauma

Mittarin 1 kokonaispistemäärän keskiarvo (X = 58,52, SD = 8,86) on kohtalaisen korkea, jonka voidaan olettaakin kuudesluokkalaisten oppilaiden kymmenjärjestelmän hallinnan tasosta näin keskeisissä tehtävissä. Kokonaispistemäärä koko mittarissa/kartoituksessa on 70 pistettä. Asetettua tavoitetta 100 % kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten

hallinnasta ei ole saavutettu. Kaiken kaikkiaan vain 4 % oppilaista saavutti asetetun tavoitteen täysistä pistemääristä. Vajaalla 11 %:lla oppilaista oli yksi tai kaksi virhepistettä. Vajaa puolet eli noin 47 % oppilaista sai yli 60 pistettä. Vajaa viidennes eli noin 19 % oppilaista saavutti korkeintaan 50 pistettä.

Tuloksia oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta tarkasteltiin piirtämällä pylväskuvio ratkaisuprosenteista tehtävittäin kuvion 3 mukaisesti. Ratkaisuprosentti merkitsee, kuinka suuren osan tehtävien maksimipisteistä oppilaat keskimäärin saivat. Keskiarvo laskettiin oppilaiden yksilöllisten ratkaisuprosenttien keskiarvona.



Tehtävä 1: Lukujen vertailua
Tehtävä 2: Lukujonojen jatkamista
Tehtävä 3; Lukujen pyöristämistä
Tehtävä 4: Mittayksiköiden muunnoksia
Tehtävä 5: Laskujärjestys
Tehtävä 6.1: Laskuja luonnollisilla luvuilla ilman kymmenlitystä
Tehtävä 6.2: Laskuja desimaaliluvuilla ilman kymmenlitystä
Tehtävä 7.1: Laskuja luonnollisilla luvuilla, joissa on kymmenlitys
Tehtävä 7.2: Laskuja desimaaliluvuilla, joissa on kymmenlitys

Kuvio 3. Mittarin 1 (eli Kymppi-kartoitus 2:n) ratkaisuprosentit tehtävittäin

Kuvion 3 mukaan kymmenjärjestelmän kannalta heikoimmin osattiin lukujen pyöristämistä (tehtävä 3), laskutoimituksia desimaaliluvuilla kymmenlityksen kanssa (tehtävä 7.2), laskujärjestystä (tehtävä 5) ja mittayksiköiden muunnoksia (tehtävä 4) käsitteleviä tehtäviä. Parhaiten sujuivat lukujen vertailua koskevat tehtävät (tehtävä 1) ja laskutoimitukset luonnollisilla luvuilla ilman kymmenlitystä (tehtävä 6.1).

Tarkastelin mittarin 1 (eli Kymppi-kartoitus 2:n) aineistoa etsimällä oppilaiden tekemiä tyypillisiä virheitä tehtävittäin. Eniten virheitä sisältävä tehtävä ja sen sisältö, oppilaiden tekemien virheiden lukumäärä, prosenttiosuus ja esimerkki oppilaiden tekemästä virhetyypistä on esitelty taulukon 5 mukaisesti.

Taulukko 5. Mittari 1:n (eli Kymppi-kartoitus 2:n) virhetaulukko

Tehtävä	**Tehtävän sisältö**	**Virheiden määrä**	**Prosentti-osuus**	**Esimerkki virhetyypistä** (tummennetut oppilaiden tekemiä virheitä)
1.e	Ympyröi vierekkäisistä luvuista suurempi. 0,50 0,125	25	33,3 %	0,50 **0,125**
2.e	Jatka lukujonoja 1,06, 1,07, 1,08,___, ___,____,____	28	37,3 %	1,06, 1,07, 1,08, **1,09, 2,0, 2,1, 2,2**
3.e	Pyöristä ykkösten tarkkuuteen. 1,7 ≈ ____	28	37,3 %	1,7 ≈ **2,0**
4.b	Muunna annetuiksi yksiköiksi 1mm = ____cm	24	32 %	1mm = **0,01 cm**
5.d	Laske. 2 · (1 – 0,5) =	29	38,7 %	2 · (1 – 0,5) = **0,8**
6.1 j	Laske. 150 : 10 =	13	17,3 %	150 : 10 = **100**
6.2 j	Laske. 0,5 : 10 =	30	40 %	0,5 : 10 = **0,001**
7.1 e	Laske. 216 : 2 =	24	32 %	216 : 2 = **103**
7.2 j	Laske. 10,5 – 5,05 =	42	56 %	10,5 – 5,05 = **5**

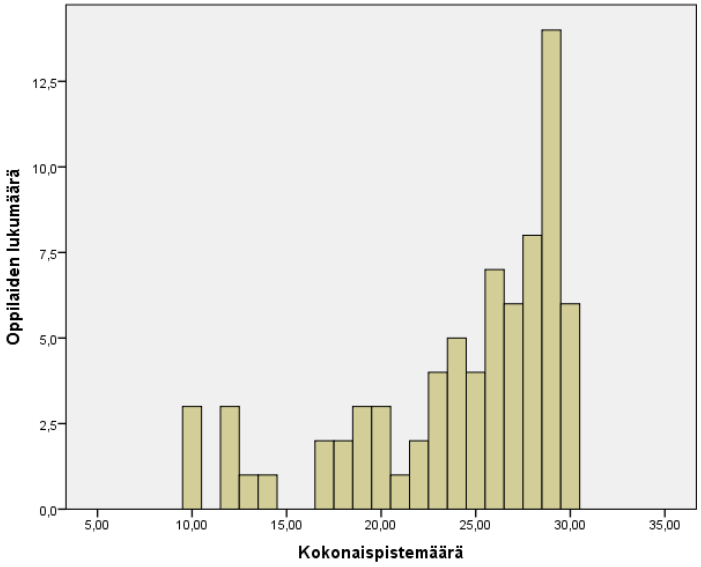
Taulukon 5 mukaisesti tehtävässä 1 (lukujen vertailu) oli eniten virheitä tehtävän kohdassa 1e. Luku 0,125 merkittiin suuremmaksi kuin luku 0,50. Kolmannes oppilaista oli ratkaissut kyseisen tehtävän kohdan virheellisesti. Tehtävässä 2 (lukujonojen jatkaminen) yli kolmannes oppilaista oli suoriutunut virheellisesti etenkin siirryttäessä desimaalilukujen lukujonossa eteenpäin ja kun kyseessä on sadasosien tarkkuudella ilmaistut luvut (2e). Tehtävä 3 (lukujen pyöristäminen) aiheutti monenlaisia virheitä. Aikaisempi kuvio (kuvio 3) näyttää myös oppilaiden ratkaisuprosentin olevan heikoin lukujen pyöristämiseen liittyvissä tehtävässä. Erityisesti desimaalilukujen pyöristäminen tuotti ongelmia (3e). Yli kolmannes oppilaista oli suoriutunut desimaalilukujen pyöristämisestä virheellisesti, sillä luku 2,0 on pyöristetty kymmenesosien tarkkuuteen.

Tehtävä 4 (mittayksiköiden muunnokset) olivat kaiken kaikkiaan oppilaille vaikeita. Virhetyyppejä oli monenlaisia jokaisen tehtävän kohdalla. Noin kolmannes oppilaista oli tehnyt virheitä etenkin muunnettaessa pienempää mittayksikköä suuremmaksi mittayksiköksi (4b). Tehtävässä 5 (laskujärjestys) esiintyvät virheet tuottivat ongelmia erityisesti tehtävän kohdassa 5d, jossa piti ennen kahdella kertomista ratkaista sulkujen sisällä oleva laskutoimitus desimaaliluvuilla. Tehtävä 6.1 (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja luonnollisilla luvuilla ilman kymmenylitystä) meni oppilailta parhaiten, mutta myös niissä oli virheitä esimerkiksi kerto- ja jakolaskuissa. Noin 17 % oppilaista ei osannut tehtävää, jossa annettu luku piti jakaa kymmenellä (tehtävä 6.1j). Tehtävässä 6.2 (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja desimaaliluvuilla ilman kymmenylistystä) 40 % oppilaista ei hallinnut desimaaliluvun laskutoimitusta jaettaessa desimaaliluku luvulla kymmenen (6.2j). Tehtävän 7.1 (luonnollisten lukujen laskutehtäviä, joissa on kymmenylitys) jakolaskut tuottivat kolmanneksella oppilaista ongelmia (7.1e). Tehtävässä 7.2 (desimaalilukujen laskutoimituksia, joissa on kymmenylitys) oli nähtävissä monenlaisia ongelmia. Yli puolella oppilaista oli virheitä desimaalilukujen vähennyslaskussa, jossa oli mukana kymmenylitys (7.2j).

Miten kuudennen luokan oppilaat hallitsevat mittayksiköiden muunnoksia?

Oppilaiden mittarissa 2 (eli Mittayksikkö-kartoitus 1:ssä) saamien tehtäväpistemäärien jakautumista on kuvattu taulukon 6 mukaisesti (ks. Liite 8). Tehtävässä 1 (suureiden pituus, massa ja litratilavuus vertailu) tehtäväkohtaiset pistemäärät painottuvat lähemmäksi maksimipistemäärää. Maksimipistemäärä tehtävässä 1 on 6 pistettä, jonka on saavuttanut 60 % oppilaista. Tehtävässä 2 (pituuden, massan ja litratilavuuden luetteleminen) tehtäväpistemäärät ovat jääneet maksimipistemäärästä, sillä noin 35 % oppilaista saavutti maksimipistemäärän 4 pistettä. Myös tehtävässä 3 (pituuden, massan ja litratilavuuden muunnokset) tehtäväpistemäärät ovat jääneet maksimipistemäärästä. Vain 24 % oppilaista saavuttivat maksimipistemäärän 20 pistettä annettujen mittayksiköiden muunnostehtävissä. Toisessa ja kolmannessa tehtävässä löytyy myös huomattava määrä oppilaita, joiden tehtäväpistemäärät ovat hyvin alhaisia. Tehtäväpistemäärien jakautuminen osoittaa, että oppilailla on puutteita mittayksiköiden muunnosten hallinnassa ja yksiköiden välisten suhteiden ymmärtämisessä.

Oppilaiden mittarissa 2 saamien kokonaispistemäärien jakautumista on puolestaan havainnollistettu kuviossa 4.



Kuvio 4. Mittarin 2 (eli Mittayksikkö-kartoitus 1:n) kokonaispistemäärän jakauma

Mittarin 2 kokonaispistemäärän keskiarvo (X= 24,15, SD = 5,62) on kohtalainen, mutta jää kuitenkin alle asetetun tavoitteen. Kokonaispistemäärä koko mittarissa/kartoituksessa on 30 pistettä. Seuraavassa taulukossa on esitelty, miten oppilaat ovat sijoittuneet pistemäärillään Ikäheimon (2016) määrittelemiin tasoryhmiin.

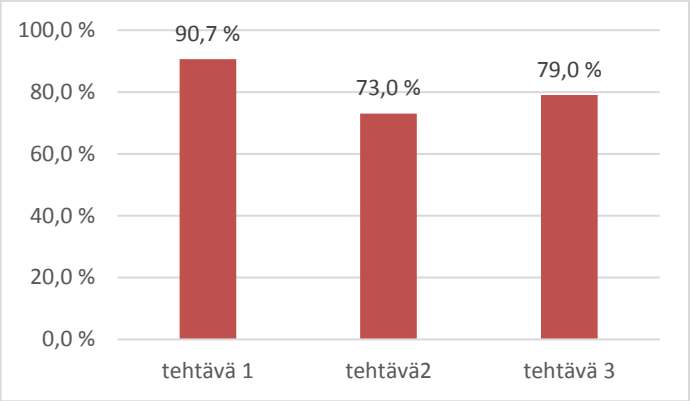
Taulukko 7. Pisterajoihin sijoittuminen mittarissa 2 (eli Mittayksikkö-kartoitus 1:ssä)

Tasoryhmät	**Pisterajat**	**Oppilaiden lukumäärä**	**Prosenttiosuus**
A-taso	0 – 15 p	8	10,7 %
B-taso	16 – 27 p	39	52,0 %
C-taso	28 – 30 p	28	37,3 %

Reilu 37 % oppilaista saavutti asetetun tavoitteen hyvästä suorituksesta mittayksiköiden muunnosten hallinnassa sijoittuen C-tason ryhmään, jossa sallittiin kaksi virhepistettä (C-taso = 28 – 30p). Lähes 11 % oppilaista sai hyvin alhaiset pistemäärät sijoittuen A-tason ryhmään, jolloin suorituspisteet jäivät alle puolet kokonaistavoitteesta (A-taso = 0 – 15p). Yli puolet oppilaiden pistemääristä sijoittui B-tason ryhmään (B-taso = 16 – 27p), ja tämä osoittaa, että oppilailla on puutteita mittayksiköiden muunnosten hallinnassa.

Mittarin 2 (eli Mittayksikkö-kartoitus 1:n) tuloksia oppilaiden mittayksiköiden muunnosten hallinnasta tarkasteltiin piirtämällä pylväskuvio ratkaisuprosenteista tehtävittäin kuvion 5

mukaisesti. Ratkaisuprosentti merkitsee, kuinka suuren osan tehtävien maksimipisteistä oppilaat keskimäärin saivat. Keskiarvo laskettiin oppilaiden yksilöllisten ratkaisuprosenttien keskiarvona.



Tehtävä 1: Suureiden (pituus, massa ja litratilavuus) vertailua
Tehtävä 2: Mittayksiköiden ((pituus, massa ja litratilavuus) täydentäminen suuruusjärjestyksessä
Tehtävä 3: Mittayksiköiden (pituus, massa ja litratilavuus) muunnoksia

Kuvio 5. Mittarin 2 (eli Mittayksikkö-kartoitus 1:n) ratkaisuprosentit tehtävittäin

Kuvion 5 mukaan mittayksiköiden muunnosten hallinnan kannalta heikoiten osattiin täydentää lyhentein pituuden, massan ja litratilavuuden mittayksiköt suuruusjärjestyksessä (tehtävä 2). Huomattavia puutteita oli nähtävissä myös mittayksiköiden muunnostehtävissä (tehtävä 3), jossa pitää ymmärtää pituuden, massan ja litratilavuuden mittayksiköitä sekä niiden välisiä suhteita. Parhaiten sujuivat tehtävät, joissa oppilaiden tuli verrata kahta annettua suuretta toisiinsa ja valita niistä suurempi (tehtävä 1).

Mittarin 2 aineistoa tarkasteltiin myös etsimällä oppilaiden tekemiä tyypillisiä virheitä tehtävittäin. Eniten virheitä sisältävä tehtävä ja sen sisältö, oppilaiden tekemien virheiden lukumäärä, prosenttiosuus ja esimerkki oppilaiden tekemästä virhetyypistä on esitelty taulukon 8 mukaisesti.

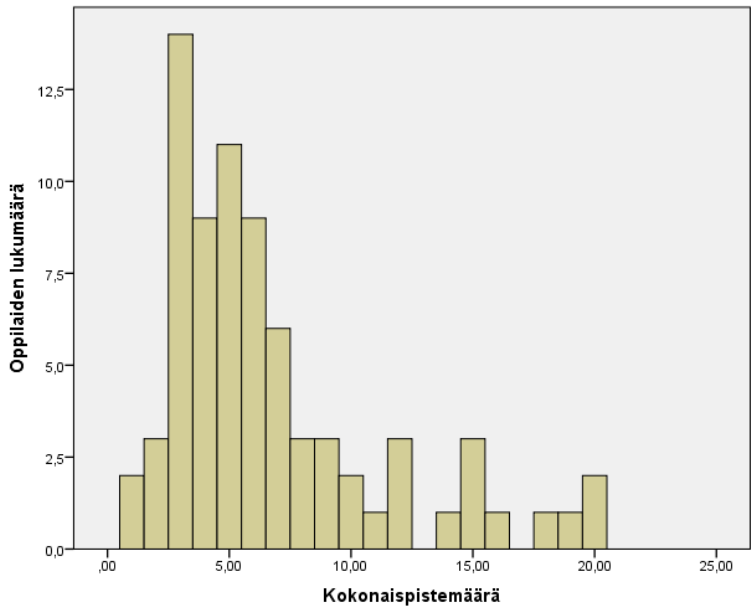
Taulukko 8. Mittari 2:n (eli Mittayksikkö-kartoitus 1:n) virhetaulukko

Tehtävä	**Tehtävän sisältö**	**Virheiden määrä**	**Prosenttiosuus**	**Esimerkki virhetyypistä** (tummennetut oppilaiden tekemiä virheitä)
1. (litratilavuus)	Ympyröi vierekkäisistä suurempi. 1 l 15 dl	19	25,3 %	**1 l** 15 dl
2. (massa)	Täydennä mittayksiköt järjestyksessä. kg, ___, _____, **g**	52	69,3 %	kg, **100g**, **10g**, g
3. (pituus)	Muunna annetuiksi yksiköiksi. 0,1 cm = ____ mm	27	36 %	0,1 cm = **10 mm**
3. (litratilavuus)	Muunna annetuiksi yksiköiksi. 1 l – 8 dl = ___ dl	31	41,3 %	1 l – 8 dl = **0,8 dl**
3. (massa)	Muunna annetuiksi yksiköiksi. 500 g = ___ kg	17	22,7 %	500 g = **5 kg**

Tehtävässä 1 (suureiden vertailu) noin 25 % oppilaista oli suoriutunut virheellisesti erityisesti litratilavuus-tehtävässä. Tehtävässä 2 (mittayksiköiden täydentäminen suuruusjärjestykseen lyhentein) massan yksiköiden luettelemisessa oli suurimmalla osalla oppilaista virheitä. Lähes 70 % oppilaista ei hallinnut massan mittayksiköistä dekagrammaa ja hehtogrammaa lyhenteinä. (Syynä on oppikirjoissa yleisesti käytössä olevat 10 g ja 100 g.) Tehtävässä 3 (pituuden, litratilavuuden ja massan mittayksiköiden muunnokset) oli monenlaisia virheitä kaikissa muunnostehtävissä. Pituuden yksiköiden muunnostehtävässä 0,1 cm = 1 mm 36 % oppilaista suoriutui virheellisesti. Litratilavuuden muunnostehtävässä oli yli 40 %:lla oppilaista virheitä. Yli 20 % oppilaista ei puolestaan hallinnut massan yksiköiden muunnostehtävää, jossa tuli muuntaa annettu pienempi yksikkö suuremmaksi.

Tutkimuksen mittari 3 (eli Mittayksikkö-kartoitus 2) kartoittaa oppilaiden yksikönmuunnostaitoja, jotka liittyvät pinta-aloihin ja tilavuuteen sekä kuutioina että litroina. Oppilaiden mittarissa 3 saamien tehtäväpistemäärien jakautumista on havainnollistettu taulukon 9 mukaisesti (ks. Liite 9). Tehtäväpistemäärät painottuivat lähelle minimipistemääriä. Jokaisessa tehtävässä on huomattava määrä oppilaita, joiden tehtäväpisteet ovat täysin nolla tai hyvin alhaiset. Tehtäväpistemäärien jakautuminen osoittaa, että oppilaat eivät hallitse pinta-aloihin ja tilavuuksiin liittyviä mittayksiköiden muunnoksia.

Oppilaiden mittarissa 3 saamien kokonaispistemäärien jakautumista on havainnollistettu kuvion 6 mukaisesti.



Kuvio 6. Mittarin 3 (eli Mittayksikkö-kartoitus 2:n) kokonaispistemäärän jakauma

Kuten kuviosta 6 näkyy, kokonaispistemäärän jakauma on kallistunut vasemmalle. Kokonaispistemäärän keskiarvo (X = 6,76, SD = 4, 58) on hyvin alhainen ja jää reilusti alle asetetun tavoitteen. Kokonaispistemäärä koko mittarissa/kartoituksessa on 20 pistettä. Seuraavassa taulukossa on esitelty, miten oppilaat ovat sijoittuneet pistemäärillään Ikäheimon (2016) määrittelemiin tasoryhmiin pinta-aloihin ja tilavuuksiin liittyvissä yksiköiden muunnostehtävissä.

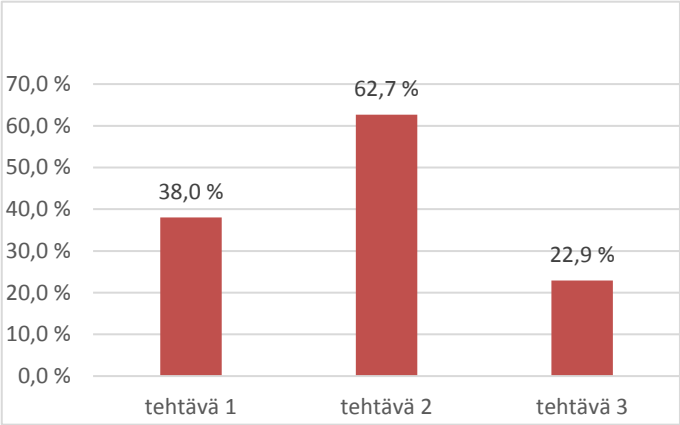
Taulukko 10. Pisterajoihin sijoittuminen mittarissa 3 eli Mittayksikkö-kartoitus 2:ssa

Tasoryhmät	**Pisterajat**	**Oppilaiden lukumäärä**	**Prosenttiosuus**
A-taso	0 – 10 p	62	82,7 %
B-taso	11 – 17 p	9	12,0 %
C-taso	18 – 20 p	4	5,3 %

Taulukko 10 osoittaa, että reilu 5 % oppilaista saavutti asetetun tavoitteen hyvästä suorituksesta ja oppilaat sijoittuivat C-tason ryhmään, jossa sallittiin kaksi virhepistettä (18 – 20 p). 12 % oppilaista sijoittui B-tason ryhmään (11 – 17 p). Kaikkiaan yli 80 % oppilaista sijoittui

A-tason ryhmään (0 – 10 p) eli he saivat korkeintaan puolet kokonaispistemäärästä. Näin ollen oppilaat eivät hallitse mittarin 3 yksikön muunnostehtäviä liittyen pinta-alaan ja tilavuuksiin sekä kuutioina että litroina.

Seuraavan kuviossa on havainnollistettu pylväskuvion avulla, miten ratkaisuprosentit ovat jakautuneet tehtävittäin mittarissa 3. Ratkaisuprosentti merkitsee, kuinka suuren osan tehtävien maksimipisteistä oppilaat keskimäärin saivat. Keskiarvo laskettiin oppilaiden yksilöllisten ratkaisuprosenttien keskiarvona.



Tehtävä 1: Suureiden vertailua (kolmen pinta-alan ja tilavuuden vertailua)
Tehtävä 2: Suureiden vertailua (kahden pinta-alan ja tilavuuden vertailua)
Tehtävä 3: Mittayksiköiden muunnoksia (pinta-ala ja tilavuus sekä kuutioina että litroina)

Kuvio 7. Mittarin 3 (eli Mittayksikkö-kartoitus 2:n) ratkaisuprosentit tehtävittäin

Oppilaiden heikko menestys pinta-aloihin ja tilavuuksiin liittyvissä mittayksiköiden muunnostehtävissä näkyy yllä olevasta pylväskuvioista. Tehtävien alhaiset ratkaisuprosentit kertovat, että oppilaat eivät ole ymmärtäneet riittävän hyvin mittayksiköiden muunnoksiin liittyviä periaatteita. Oppilaat eivät hallitse peräkkäisten yksiköiden välisiä suhdelukuja, jotka ovat pinta-alan yksiköissä 100 ja tilavuuden yksiköissä 1000 sekä litratilavuuden yksiköissä 10.

Myös mittarissa 3 aineistoa tarkasteltiin kiinnittämällä huomiota oppilaiden tekemiin tyypillisiin virheisiin tehtävittäin. Eniten virheitä sisältävä tehtävä ja sen sisältö, oppilaiden tekemien virheiden lukumäärä, prosenttiosuus ja esimerkki oppilaiden tekemästä virhetyypistä on esitelty taulukon 11 mukaisesti.

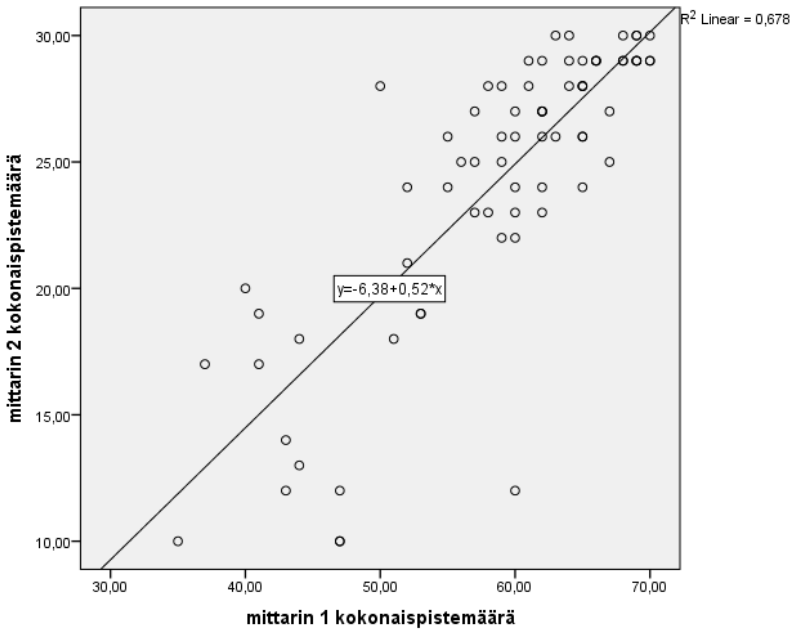
Taulukko 11. Mittarin 3 (eli Mittayksikkö-kartoitus 2:n) virhetaulukko

Tehtävä	**Tehtävän sisältö**	**Virheiden määrä**	**Prosenttiosuus**	**Esimerkki virhetyypistä** (tummennetut oppilaiden tekemiä virheitä)
1. (Pinta-ala)	Ympyröi vierekkäisistä yhtä suuret. $1m^2$ $100dm^2$ $100cm^2$	56	74,7 %	**$1m^2$** $100dm^2$ **$100cm^2$**
2. (Tilavuus)	Ympyröi vierekkäisistä suurempi. 100 l $1m^3$	54	72 %	**100 l** $1m^3$
3. (Pinta-ala)	Muunna annetuiksi yksiköiksi. $1m^2$ = ____ dm^2	64	85,3 %	$1m^2$ = **$10\ dm^2$**
3. (Tilavuus litroina ja kuutioina)	Muunna annetuiksi yksiköiksi. 1 ml = ____ cm^3	64	85,3 %	1 ml = **$0{,}1\ cm^3$**
3. (Tilavuus kuutioina)	Muunna annetuiksi yksiköiksi. $1dm^3 - 1cm^3$ = ___ cm^3	71	94,7 %	$1dm^3 - 1cm^3$ = **$9\ cm^3$**

Merkille pantavaa oli, että lähes kaikissa tehtävissä oli vähintään 70 %:lla oppilaista virheitä ja virheitä oli hyvin monenlaisia. Tehtävässä 1 (kolmen suureen vertailua toisiinsa) lähes 75 % oppilaista ei hallinnut kolmen pinta-alan vertailua. Tehtävässä 2 (kahden suureen vertailua toisiinsa) yli 70 % oppilaista ei hallinnut suureiden vertailua, kun yksikköinä olivat tilavuus litroina ja kuutioina. Tehtävän 3 (mittayksiköiden muunnokset) kaikissa muunnostehtävissä oli hyvin monenlaisia virheitä. Lähes 95 % oppilaista oli suoriutunut virheellisesti mittayksiköiden muunnostehtävässä, joka liittyivät tilavuuteen kuutioina.

Kymmenjärjestelmän osaamisen yhteys mittayksiköiden muunnosten hallintaan

Mittarien 1 ja 2 välistä yhteyttä tarkasteltiin käyttämällä korrelaatiodiagrammia ja sen merkitsevyystestausta. Seuraavassa kuviossa on havainnollistettu mittarin 1 ja 2 välistä yhteyttä.

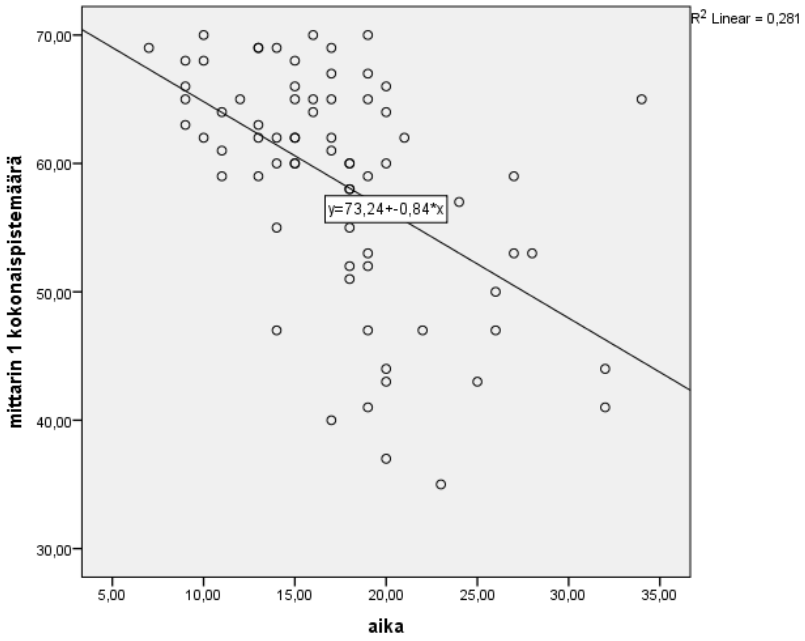


Kuvio 8. Mittarin 1 ja 2 (eli Kymppi-kartoitus 2 ja Mittayksikkö-kartoitus 1) välinen yhteys

Kuten kuvio 8 osoittaa mittarin 1 ja 2 kokonaispistemäärien välillä on voimakas positiivinen yhteys. Mitä korkeamman pistemäärän oppilas on saanut mittarissa 1, sitä korkeamman pistemäärän oppilas on saanut myös mittarissa 2. Mittarin 1 pistemäärän vaihtelu selittää vajaat 70 % mittarin 2 pistemäärän vaihtelusta. Näin ollen kymmenjärjestelmän osaaminen auttaa mittayksiköiden muunnosten hallinnassa.

Käytetyn ajan ja yhteispisteiden välinen yhteys

Mittarin 1 (Kymppi-kartoitus 2) käytetyn ajan ja yhteispistemäärien välistä yhteyttä selvitettiin käyttämällä myös korrelaatiokertoimia ja sen merkitsevyystestausta. Seuraavassa kuviossa on havainnollistettu, minkälainen yhteys käytetyllä ajalla ja yhteispistemäärällä on mittarissa 1.



Kuvio 9. Käytetyn ajan ja yhteispistemäärien välinen yhteys mittarissa 1

Kuvio 9 osoittaa, että mittarin 1 (eli Kymppi-kartoitus 2:n) tehtävien tekemiseen käytetty aika on negatiivisessa yhteydessä mittarin 1 kokonaispistemäärään. Aika selittää noin 30 % kokonaispistemäärän vaihtelusta. Kuvio osoittaa, että oppilaat, jotka saivat hyviä pistemääriä, käyttivät tehtäviin vähemmän aikaa kuin oppilaat, jotka saivat pieniä pistemääriä. Tehtäviin käytetty aika yhdessä yhteispisteiden kanssa kertovat, miten automatisoituneet oppilaan laskutaidot ovat ja miten kehittyneitä oppilaan laskustrategiat ovat.

6.2 Yhteenveto määrällisen aineiston tuloksista

Tutkimuksen mittarin 1:n (eli Kymppi-kartoitus 2:n) tulokset viittaavat siihen, että oppilailla on puutteita kymmenjärjestelmän hallinnassa. Noin 15 % oppilaista saavutti täydet tai lähes täydet pistemäärät tässä kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa mittaavassa kartoituksessa. Vajaa puolet oppilaista sai kartoituksesta yli 60 pistettä kokonaispistemäärän ollessa 70 pistettä. Vajaa viidennes oppilaista saavutti korkeintaan 50 pistettä. Oppilailla oli eniten virheitä lukujen pyöristämisessä, desimaalilukujen laskutoimituksissa kymmenylityksen kanssa, laskujärjestystä ja mittayksiköiden muunnoksia käsittelevissä tehtävissä.

Esitetyt mittarin 2 (eli Mittayksikkö-kartoitus 1:n) tulokset liittyen pituuden, massan ja litratilavuuden yksiköihin kertovat, että yli 60 %:lla oppilaista on puutteita kyseisten mittayksiköiden muunnosten hallinnassa sekä vaikeuksia ymmärtää peräkkäisten yksiköiden välistä suhdelukua. Mittarin 3 (eli Mittayksikkö-kartoitus 2:n) tulokset kertovat, että lähes 95 % oppilaista ei hallitse pinta-aloihin ja tilavuuksiin liittyviä yksiköiden muunnoksia eikä peräkkäisten yksiköiden välisiä suhdelukuja. Mittarien tulokset paljastavat myös, että kymmenjärjestelmätaitojen hallinnalla on voimakas yhteys mittayksiköiden muunnosten hallintaan.

6.3 Laadullisen tutkimusaineiston analyysi ja tulokset

Opettajien haastattelut olivat pituudeltaan noin 35–45 minuuttia. Kaikki haastattelut nauhoitettiin, jonka jälkeen siirsin haastatteluaineiston tietokoneelle. Aloitin analyysin litteroimalla haastatteluaineison mahdollisimman tarkasti sana sanalta jättäen pois ei-kielelliset kommunikoinnit, mikäli niiden tarkoitus ei ollut merkitsevä ilmaisuun nähden. Litteroitua haastattelua syntyi tekstinä noin 30 sivua, 1,5 rivinvälillä ja 12 fonttikoolla. Ennen analyysiin siirtymistä kuuntelin haastatteluja useaan kertaan läpi, jonka jälkeen myös luin tekstejä useita päiviä saadakseni kokonaiskäsityksen tutkittavien kokemuksista ilmiötä kohtaan. Näin pyrin myös varmistamaan tutkimushenkilöiden kielellisen ilmaisun muuttumattomuuden.

Analysoin tutkimusaineistoa Amadeo Giorgin (1988) kehittämän fenomenologisen analyysin ja erityisesti Perttulan (1995, 2000) siihen tekemän muunnoksen mukaisesti. Tutkimusaineiston analyysini selkeänä ohjenuorana oli pyrkiä kuvaamaan opettajien kokemukset ja niihin kietoutuneet merkitykset mahdollisimman muuttumattomina ja puhtaina. Fenomenologinen analyysi on muotoutunut kaksiosaiseksi, jonka ensimmäinen osa etenee yksilökohtaisella tasolla niin, että tutkimuksessa kuvataan niin monta yksilökohtaista merkitysverkostoa kuin tutkimuksessa on osallistuneita (Perttula 2000, 430). Tässä tutkimuksen vaiheessa kuvataan neljän opettajan yksilökohtaiset merkitysverkostot. Analyysin toisessa osassa yksilökohtaisesta tiedosta edetään yleiseen tietoon, joka on enemmän tutkijan konstruoimaa tietoa. (Perttula 2000, 430–431.) Seuraavassa taulukossa on kuvattu molemmat metodit rinnakkain, joista Perttulan muunnos eksistentiaalisen fenomenologian periaatteisiin nojaten on tutkimukseeni valittu menetelmä.

Taulukko 12. Giorgin metodin vaiheet ja käyttämäni Perttulan metodin muunnos (Giorgi 1988, Perttula 1995, 2000).

Giorgin fenemenologinen analyysimenetelmä	**Perttulan muunnos eksistentiaalinen fenomenologia**
1. Vaihe Aineiston huolellinen lukeminen ja kokonaiskäsityksen muodostaminen	**I. Päävaihe** 1) Aineiston avoin lukeminen ja kokonaiskäsityksen muodostaminen 2) Muodostetaan tutkimusaineistoa jäsentävät sisältöalueet
2. Vaihe Tutkimusaineiston jakaminen merkitysyksiköihin	3) Aineiston jakaminen merkitysyksiköihin
3. Vaihe Merkitysyksiköiden muuntaminen tutkijan yleiselle kielelle	4) Merkitysyksiköiden muuntaminen tutkijan yleiselle kielelle 5) Merkitysyksiköiden sijoittaminen sisältöalueisiin
4. Vaihe Yksilökohtaisen merkitysverkoston muodostaminen	6) Sisältöalueittain etenevän yksilökohtaisen merkitysverkoston muodostaminen 7) Sisältöalueista riippumattoman yksilökohtaisen merkitysverkoston muodostaminen
5. Vaihe Yleisen merkitysverkoston muodostaminen	**II. Päävaihe** 1) Tutkimusasenteen omaksuminen 2) Merkityssuhteiden erottaminen ja muuntaminen merkityssuhde-ehdotelmiksi 3) Sisältöalueiden muodostaminen 4) Merkityssuhde-ehdotelmien sijoittaminen sisältöalueisiin 5) Sisältöalue-ehdotelmien muodostaminen 6) Muodostetaan ehdotelma yleiseksi merkitysverkostoksi 7) Yleisen merkitysverkoston ja yleisen merkitysverkostotyyppien muodostaminen

Perttulan analyysi jakautuu kahteen eri päävaiheeseen, joissa molemmissa on seitsemän eri osavaihetta (Perttula 1995, 94–95). Analyysin ensimmäinen päävaihe koostui opettajien ainutkertaisten ja yksilökohtaisten kokemusten hahmottamisesta eli kunkin opettajan kokemuksen yksilökohtaisten piirteiden selvittämisestä. Kokemuksen yksilökohtaisesta kuvauksesta käytän nimitystä opettajien yksilökohtaiset merkitysverkostot. Analyysin toinen päävaihe noudattaa Perttulan vuonna 2000 julkaisemassa artikkelissa esiintyvää fenomenologisen metodin periaatteita (ks. Perttula 2000). Analyysin toisessa päävaiheessa etenin tutkittavan ilmiön yleiseen tarkasteluun esittämällä tutkijan käsitteellistämää yleistä tietoa. Kokemusten yleisten piirteiden kuvauksesta käytän nimitystä kokemuksen yleinen merkitysverkosto ja yleiset merkitysverkostotyypit. Yleinen merkitysverkosto sisältää kaikkien opettajien yhteiset ja samanlaiset kokemukset tutkittavasta ilmiöstä. Yleiset merkitysverkostotyypit ovat toisiinsa palautumattomia yleisiä merkitysverkostoja (Perttula 2000, 440).

Seuraavassa esittelen kokonaisuudessaan aineiston analyysin etenemisen käyttäen aineistonäytteitä esimerkkinä. Ensimmäisessä päävaiheessa muodostuivat yksilökohtaiset merkitysverkostot opettajien kokemuksista oppilaiden kymmenjärjestelmätaitojen ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Tämän jälkeen siirryin toiseen päävaiheeseen, jonka tarkoituksena oli saavuttaa yksilökohtaisista merkitysverkostoista ilmenneistä opettajien kokemuksista tutkittavan ilmiön yleinen merkitysverkosto. Lopulta opettajien kokemuksista muodostui yksi yleinen merkitysverkosto ja neljä merkitysverkoston tyyppiä, jotka kuvaavat parhaiten yleisellä tasolla tutkittavasta ilmiöstä nousseita ydinmerkityksiä.

6.3.1 Yksilökohtaisen merkitysverkoston muodostaminen

Osavaihe 1: Aineiston avoin lukeminen ja kokonaiskäsityksen muodostaminen

Analyysin ensimmäisessä vaiheessa luin aineiston huolellisesti läpi kokonaiskäsityksen saamiseksi. Luin litteroitua haastatteluaineistoa läpi sanatarkasti tehden samalla muistiinpanoja aineistoista nousseista havainnoistani. Samalla pyrin rajaamaan omat ennakkokäsitykseni pois ja kohtaamaan aineiston sellaisenaan eläytyen juuri haastateltavien kokemuksiin. Tavoitteena on kohdata aineisto sellaisena kuin se todella ilmenee ja tämän avulla luoda perusta toiselle vaiheelle. Tässä vaiheessa pyrin systemaattisesti eriyttämään oman kokemuksen opettajien kokemuksista. Tämä fenomenologiseksi reduktioksi kutsuttu menetelmä sulkeistamisen ja mielikuvatasolla tapahtuvan muuntelun avulla nousee keskeiseksi osaksi fenomenologista tutkimusperinnettä (Perttula 1995, 69–71). Itselleni omien ennakkokäsitysten sulkeistaminen vaati jatkuvaa ja erityisen tietoista itsekriittistä työskentelyä, koska aikaisempi teoreettinen tieto ja esiymmärrykseni tutkittavasta ilmiöstä on ollut merkittävää (ks. luku 5.2.2).

Osavaihe 2: Tutkimusta jäsentävien sisältöalueiden muodostaminen

Aineiston huolellisen sulkeistavan lukemisen jälkeen alkoi tutkimusaineistosta muodostua aineistoa jäsentäviä sisältöalueita. Perttulan (1995, 91) mukaan sisältöalueet voidaan muodostaa joko koko tutkimusaineistosta tai yhdestä tutkimusaineiston osasta kerrallaan. Valitsin ensimmäisen vaihtoehdon, jossa sisältöalueet muodostivat koko tutkimusaineiston. Muodostamani sisältöalueet jäsentyivät haastattelua johdattaneita teema-alueita mukaillen. Tässä vaiheessa aineistosta löytyi selkeästi kaksi pääteemaa liittyen kymmenjärjestelmätaitojen ja

mittayksiköiden muunnosten oppimiseen ja opettamiseen. Näiden teemojen lisäksi aineistosta nousi myös sisältöalue käsittämään yleistä tietoa mittareista ja opettajien kokemuksista oppilaiden taitotasosta. Koin tärkeäksi sisällyttää mukaan myös nämä yleiset käsitykset, koska ilmausten joukosta oli nähtävissä kokemuksellisia kuvauksia, joita opettajilla syntyi heidän nähdessään oppilaiden tulokset määrällisen aineiston mittareista.

Jokaisen opettajan aineisto näyttäytyi hyvin yksilöllisenä eikä se edennyt välttämättä järjestyksessä haastattelua johdatteiden teema-alueiden mukaisesti. Yhdellä opettajalla saattoi olla enemmän kokemuksellisia merkityksiä oppilaiden kymmenjärjestelmätaitoihin liittyen, kun taas toisella opettajalla löytyi enemmän kokemuksia ja mielikuvia liittyen mittaamiseen. Sisältöalueiden tulisi olla mahdollisimman väljiä, jotta ne eivät rajoittaisi tutkijaa jatkossa tavoittamaan kaikkia aineistossa esiintyviä sisältöjä. Sisältöalueiden tehtävänä on jäsentää laajaa tutkimusaineistoa hallittavampaan muotoon. (Perttula 1995, 91, 121.) Aineistosta muodostui haastatteluja jäsentäviä sisältöalueita yhteensä 11. Jokaisen opettajan kokemuksellisten ilmausten kirjosta löytyi täysin samat sisältöalueet, jotka merkittävästi helpottivat aineiston rajaamista ja käsittelyä. Alla esittelen aineistosta nousseet sisältöalueet numeroituna:

> **Yksilökohtaisia merkitysverkostoja jäsentävät sisältöalueet:** 1) Mittareiden tulosten vastaavuus oppilaiden taitotasoon ja oppilaiden tuntemus 2) Kymmenjärjestelmän oppiminen 3) Kymmenjärjestelmän oppimisen haasteet 4) Kymmenjärjestelmän oppimisen edistäviä tekijöitä 5) Kymmenjärjestelmän opettaminen 6) Kymmenjärjestelmän opettamisen haasteet 7) Mittayksiköiden muunnosten oppiminen 8) Mittayksiköiden muunnosten oppimisen haasteet 9) Mittayksiköiden muunnosten oppimista edistäviä tekijöitä 10) Mittayksiköiden muunnosten opettaminen ja 11) Mittayksiköiden muunnosten opettamisen haasteet

Osavaihe 3: Aineiston jakaminen merkitysyksiköihin

Analyysin kolmannessa osavaiheessa jaoin kaikkien opettajien haastatteluaineistot kokonaisuudessaan merkityksen sisältämiin yksiköihin. Muodostin sisältöalueita ja merkitysyksiköitä osittain samanaikaisesti. Merkitysyksikköjen erottaminen tulisi tapahtua niin, että tutkija löytäisi tutkittavan ilmiön kannalta merkityksellisiä asioita. Ne ilmaisevat ilmiön kannalta olennaisen ja sellaisenaan ymmärrettävän merkityksen. Merkitysyksiköiden erottaminen etenee tutkijan intuition ohjaamana. (Perttula 1995, 72.) Merkityksen sisältävä yksikkö määrittyi sisällön mukaan, sen muodolla tai laajuudella ei ollut väliä. Merkityksen sisältämät yksiköt voivat olla suhteellisen laajojakin. Merkityssuhteet eivät ole toisistaan irrallisia, vaan ne ovat toisiinsa jollain tavalla liittyneinä. Tämä on perusteltua tutkimuksen holistisen

ihmiskäsityksenkin perusteella. (Perttula 1995, 123–124.) Seuraavaksi esitän esimerkin yhdestä litteroidusta haastatteluaineistosta, josta olen erottanut eri merkitysyksiköt toisistaan kauttaviivoilla. Tämän esimerkin tavoin erotin litteroidusta haastattelusta kaikki merkityksen sisältämät yksiköt. Esimerkissä olevat merkitysyksiköt eivät ole vielä jaettu sisältöalueisiin.

> ”// Huomasin, että meillähän kirja ei anna heksaa eikä dekaa [mittayksiköitä] vaan ne on sata ja kymppi. Mikä mulle oli tätä kirjasarjaa mitä käytetään. Toisaalta muistan itse lapsuudestani, että ne oli vähän hämääviä koska ethän sää koskaan niitä käytä tai kuule. // Muuten nämä on perusasioita joita pitäisi tietää. Jotkut eivät vaikka mittanauhaa ja viivotinta otetaan ja konkreettisia esimerkkejä käytetään. Ne unohtuu samantien. // Tytöt muistaa kun he joutuu kaavoja mittaamaan, sieltä ehkä jotakin. Onhan pojillaki teknisessä työssä, mut silti se tuntuu että se on niin kaukana lasten elämästä. // Pituutta mitataan kun hypätään ja matkaa juostaan. Ei se vaan jotenkin jää mieleen. // Tunnilla pitää hirveästi palauttaa mieleen näitä asioita. Se unohtuu kun on vaan paperia ja kynä. // Sitä aina hämmästelee, miten se yksi millimetri kun se on siinä omassa viivottimessa. Se ei muistu mieleen, että se on kymmenkertainen seuraavaan yksikköön nähden.”// (opettaja 1)

Osavaihe 4: Merkitysyksiköiden muuntaminen tutkijan yleiselle kielelle

Analyysin neljännessä osavaiheessa jokainen merkitysyksikkö käännetään tutkittavan kieleltä tutkijan yleiselle kielelle. Konkreettisesti jokaisen merkitysyksikön perään kirjoitetaan tutkijan käännös niin, että merkitysyksikön ja siitä tehdyn käännöksen välinen yhteys on selvästi nähtävissä. Käännöksen avulla tutkijan on käytettävä reflektiota ja mielikuvien tasolla tapahtuvaa muuntelua, joten sulkeistamisen vaatimus kärjistyy erityisesti tähän vaiheeseen. Tutkijalta vaaditaan jatkuvaa paluuta alkuperäiseen tutkimusaineistoon, koska ilman reflektiota tutkija saattaa menettää oikean tuntuman aineistoon (Perttula 1995, 83, 126). Jouduin itse palaamaan useita kertoja aikaisempiin vaiheisiin saavuttaakseni riittävän selkeät, toisiinsa jäsentyneet ja tutkittavien lähtökohtia kuvaamat kokemukset.

Tässä vaiheessa muotoilin jokaisen merkitysyksikön yleiselle kielelle, jolloin opettajien käyttämät murre- ja täytesanat sekä tutkittavan ilmiön kannalta epäoleelliset kohdat poistuivat. Jokainen käännettävä yksikkö oli mietittävä tarkkaan, jotta alkuperäisestä tekstistä välittyvä kokemus säilyi. Säilytin Perttulan (1995, 127) mukaisesti alkuperäisen tekstin käännöksen rinnalla, jotta lukijoiden on mahdollista arvioida lopputuloksen kohdallisuutta. Käännökset on tehty jokaisen merkitysyksikön perään isoilla kirjaimilla kirjoitettuna, jotta erottaminen alkuperäisestä tekstistä olisi mahdollisimman helppoa. Käytin käännöksissä hän-muotoa, jolloin tekstin henkilökohtaisuus vaihtui kertojan muotoon. Hakasuluissa on

tutkijan omaa selvennystä lukijoille, mihin asiayhteyteen ilmaus kuuluu. Seuraavassa esimerkissä on nähtävissä tämän vaiheen kulku merkitysyksiköiden muuttamisesta yleiselle kielelle. Esimerkkiin on sisällytetty kolme merkitysyksikköä opettaja 1:n aineistonäytteestä.

> *"Huomasin, että meillähän kirja ei anna heksaa eikä dekaa [mittayksiköitä] vaan ne on sata ja kymppi. Mikä mulle oli tätä kirjasarjaa [Sanoma Pro Matikka] mitä käytetään."* HEILLÄ ON OPETUKSESSA KÄYTÖSSÄ SANOMA PRO KUSTANTAMA MATIKKA-SARJA. HÄNEN MUKAAN DEKA- JA HEHTOMITTAYKSIKÖITÄ EI OPETETA TÄMÄN KIRJASARJAN MUKAAN.*"Toisaalta muistan itse lapsuudestani, että ne oli vähän hämääviä koska ethän sää koskaan niitä käytä tai kuule."* HÄN MUISTELEE OMASTA LAPSUUDESTAAN, KUINKA NE [DEKA- JA HEHTOMITTAYKSIKÖT] OLIVAT HÄMÄÄVIÄ, KOSKA NIITÄ EI KOSKAAN KÄYTETÄ EIKÄ NIITÄ KUULE.*"Muuten nämä on perusasioita joita pitäisi tietää. Jotkut eivät vaikka mittanauhaa ja viivotinta otetaan ja konkreettisia esimerkkejä käytetään. Ne unohtuu samantien."* HÄNEN MIELESTÄÄN NÄMÄ OVAT PERUSASIOITA, JOITA OPPILAIDEN TULISI HALLITA. NE UNOHTUVAT HETI, VAIKKA KONKREETTISIA VÄLINEITÄ JA ESIMERKKEJÄ KÄYTETÄÄN.

Osavaihe 5: Merkitysyksiköiden sijoittaminen sisältöalueisiin

Tässä vaiheessa sijoitin jokaisen merkityksen sisältämän yksikön ja sen tutkijan tekemän yleisen käännöksen aineistoa jäsentävien sisältöalueiden alle. Jokaiseen sisältöalueeseen sijoittui vähintään yksi merkityksen sisältämä yksikkö jokaiselta opettajalta. Erotin jokaisen opettajan merkitysyksikön omalla värillään ja sijoitin niitä sisältöalueisiin perinteisen leikkaa-liimaa -menetelmän mukaisesti. Jokainen merkityksen sisältämä yksikkö ja sen muunnos olisi hyvä sijoittaa vain yhteen sisältöalueeseen, mutta tämä ei ole tutkimuksen kulussa niin yksiselitteistä. Tärkeämpää on sijoittaa merkityksen sisältämä yksikkö useampaan sisältöalueeseen kuin jättää se toisen sisältöalueen puitteissa huomioimatta. (Perttula 1995, 135.) Seuraavassa kuvaan aikaisemman aineistoesimerkin (opettaja 1) avulla, miten yleiselle kielelle muutetut merkitysyksiköt ovat sijoitettu sisältöalueisiin (sulkujen sisällä sisältöalue, johon merkitysyksikkö sijoitettu):

- Heillä on opetuksessa käytössä Sanoma pro kustantama Matikka-sarja. Hänen mukaan deka- ja hehtomittayksiköitä ei opeteta tämän kirjasarjan mukaan. **(Sisältöalue 10)**
- Hän muistelee omasta lapsuudestaan, kuinka ne [deka- ja hehtomittayksiköt] olivat hämääviä, koska niitä ei koskaan käytetä eikä niitä kuule. **(Sisältöalue 8)**
- Hänen mielestään nämä ovat perusasioita, joita oppilaiden tulisi hallita. Ne unohtuvat heti, vaikka konkreettisia välineitä ja esimerkkejä käytetään. **(Sisältöalue 7)**

Osavaihe 6: Sisältöalueittain etenevän yksilökohtaisen merkitysverkoston muodostaminen

Kuudennessa osavaiheessa tiivistetään merkityksen sisältämät yksiköt integroimalla ne toistensa yhteyteen sisältöalueittain. Prosessissa tiivistetyt tutkijan kääntämät muunnokset asetetaan sisällöllisesti toistensa yhteyteen pyrkien löytämään ainutlaatuisia merkitystihentymiä. (Perttula 1995, 94, 135.) Käytännössä tämä tarkoitti tutkimuksessani, että muodostin sisältöalueittain etenevän kertomuksen, jossa yksi sisältöalue muodostaa yhden kappaleen. Tiivistin erittäin varovaisesti merkityssuhteita toisiinsa, koska tärkeän tiedon laiminlyömistä tässä vaiheessa täytyy minimoida (Perttula 1995, 137). Seuraavassa on esimerkki koko merkitystihentymästä yhtenäisenä tarina, joka muodostui sisältöalueesta 7.

> Hänen mielestään nämä ovat perusasioita, joita oppilaiden tulisi hallita. Ne unohtuvat heti, vaikka konkreettisia välineitä ja esimerkkejä käytetään. Hän hämmästelee aina sitä, kuinka yksi millimetri siitä omasta viivoittimesta ei muistu mieleen, että se on kymmenkertainen seuraavaan yksikköön nähden. Hän voi vain kuvitella, kuinka kokeeseen on ponnisteltu ja sitten taas unohdettu. Hänen mielestä opittu ei pääse käytännön tasolle, koska harvat tuon ikäiset tarvitsevat tilavuusmääriä. Hänen mukaan nämä on ne konkreettiset keinot, mistä oppilaat saavat itse lähteä miettimään. Hän kokee, että tilavuus on käsitteenä vaikea. Hänen mielestään mittayksiköiden muunnokset ovat olleet kaikki heikoille oppilaille todella vaikeita ja ne ovat paljon pudottaneet pistemääriä [Makeko-testissä]. Kyllä nämä tulokset täsmäävät, että mittayksiköt ovat olleet vaikeita ja joillekin kaikki ovat olleet kauttaaltaan vaikeita. Hänen mielestään kaikilla oppilailla ei ole kyse oppimisvaikeuksista, vaan se on yleensä niin vaikea asia. (opettaja 1)

Osavaihe 7: Sisältöalueista riippumattoman yksilökohtaisen merkitysverkoston muodostaminen

Ensimmäisen päävaiheen viimeisessä osassa muodostin lopullisen yksilökohtaisen merkitysverkoston sijoittamalla sisältöalueet sisällöllisesti toistensa yhteyteen. Tämän vaiheen tarkoituksena on asettaa muodostetut sisältöalueet toistensa yhteyteen niin, että siitä muodostuu selkeä ja yhtenäinen kuvaus tutkittavasta ilmiöstä yksilökohtaisella tasolla (Perttula 1995, 137–139). Tutkimuksessa jokaisen opettajan ainutkertaisista kokemuksista muodostui oma merkitysverkosto, jolloin merkitysverkostoja syntyi yhteensä neljä. Yksilökohtainen merkitysverkosto muodostui lopulta yhdeksi kokonaiseksi tarinaksi, jossa merkitystihentymät on hioutunut toistensa yhteyteen. Lukemisen helpottamiseksi yhdistelin joitakin merkitystihentymiä yhteen muodostaen oman tarinan niin kokemuksista oppilaiden kymmenjärjestelmän hallinnasta kuin kokemuksista oppilaiden mittayksiköiden muunnosten hallinnastakin. Näiden välillä on kappalejako. Joissakin tapauksissa yhdistin merkitysyksiköitäkin toisiinsa,

jotta tekstistä tulisi johdonmukaisempaa. Tästä huolimatta merkitysverkostojen kieli on vielä tässä vaiheessa hyvin toistavaa ja hiomatonta. Tuloksena syntyi selkeä kuvaus siitä, millaisena näyttäytyy oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinta opettajien kokemusmaailmassa.

Opettajien yksilökohtaisia merkitysverkostoja ei kuvata tässä tutkimuksessa anonymiteetin suojaamisen vuoksi. Jokaisen opettajan yksilöllisyys näkyy selvästi yleisessä merkitysverkostossa, sillä tutkimuksessa muodostui jokaiselta opettajalta oma merkitysverkostotyyppinsä. Tutkimukseni yleinen merkitysverkosto rakentuu tutkittavan ilmiön kannalta välttämättömistä ja kaikille yksilökohtaisille merkitysverkostoille yhteisistä merkityksistä.

6.3.2 Yleisen merkitysverkoston muodostaminen

Osavaihe 1: Tutkimusasenteen omaksuminen

Tutkimuksen analyysi etenee yksilökohtaiselta yleiselle tasolle yleisen Perttulan (2000) uudelleen muotoilevan eksistentiaaliseen fenomenologiaan pohjautuvan metodin mukaisesti (ks. taulukko 9). Metodissa yksilökohtaiset merkitysverkostot mielletään ehdotelmiksi kokemuksen yleisestä tiedosta. Kyseessä on tutkimusasenteen omaksuminen eli tavasta katsoa tutkimusaineistoa. Yksilökohtaiset merkitysverkostot osoittautuvat ehdotelmiksi yleisestä kokemuksia koskevasta tiedosta, jota kohti analyysissä edetään. Yleiseen tietoon pyrkivässä analyysissä tulee säilyttää koko ajan yhteys yksilökohtaiseen tietoon eli yksilökohtaisiin merkitysverkostoihin. (Perttula 2000, 422–433.) Tämä osoittautui tutkimuksessani jatkuvaksi ja systemaattiseksi vuoropuheluksi yksilökohtaisten ja yleisten merkitysverkostojen välillä. Virtanen (2006, 190) tuo esille, että tutkittavien antamat merkitykset ilmiöstä eivät ole enää yksilön antamia vaan osa yleistä kokemusta ilmiöstä. Konkreettisesti analyysiprosessin eteneminen on samankaltainen kuin ensimmäisessä päävaiheessa, mutta tästä eteenpäin merkityksen yksilöllisyys häivytetään ja kiinnostus kohdistuu kuviteltuun yleiseen kokemukseen (Perttula 1995, 155). Tässäkin vaiheessa käsittelin tutkimusaineistoa aina yksi merkitysverkosto kerrallaan.

Osavaihe 2: Merkityssuhteiden erottaminen ja muuntaminen merkityssuhde-ehdotelmiksi

Toisessa osavaiheessa jaoin jokaisen yksilökohtaisen merkitysverkoston merkityssuhteisiin, kuten aiemmassa vaiheessa jaoin tutkimusaineiston merkitysyksiköiksi. Tässä vaiheessa aineisto oli jo huomattavasti jäsentyneempi, joten merkityssuhteet tulivat tiiviimmiksi kuin analyysin ensimmäisessä osassa. Muutin merkityssuhteet kielelle, jossa oli häivytetty yksilöperustaisuus, mutta yhteys yksilökohtaisuuden kanssa oli koko ajan läsnä. Näin muodostui merkityssuhde-ehdotelmia (Perttula 2000, 434). Merkityksiä ei mielletä enää tietyn koetun maailman osaksi, vaan kiinnostus kohdistuu merkityssuhteisiin, jotka näyttäytyvät kaikkien tutkittavien koetussa maailmassa (Perttula 1995, 154). Asettelin yksilökohtaisen merkitysverkoston merkityssuhteet ja muodostettavan yleisen merkityssuhde-ehdotelman taulukonomaisesti vierekkäin, jotta minulla oli mahdollisuus kokoa ajan palata takaisin yksilökohtaiseen tietoon. Lisäsin tässä vaiheessa merkityssuhde-ehdotelmiin juoksevat numerot, koska ne helpottivat huomattavasti vaihetta, jossa merkityssuhde-ehdotelmat sijoitetaan sisältöalueisiin. Seuraavassa taulukossa esittelen esimerkkinä (opettaja 1) yksilökohtaisen merkitysverkoston merkityssuhteiden erottamisen ja niiden muuntamisen merkityssuhde-ehdotelmiksi, josta yksilöperustaisuus on häivytetty.

Taulukko 13. Merkityssuhteiden erottaminen (opettaja 1).

Yksilökohtaisen merkitysverkoston erottaminen merkityssuhteisiin (Vaihe II/2)	**Merkityssuhteiden muuttaminen merkityssuhde-ehdotelmiksi/kieleksi, jossa kokemuksen yksilökohtaisuus häviää (Vaihe II/2)**
OPETTAJA 1: *Hänellä on vuosien työkokemus opetusalalta.*	1 OPETTAJALLA ON VUOSIEN KOKEMUS OPETUSALALTA.
Hän on opettanut tässä koulussa neljä vuotta. Suurin osa näistä oppilaista ovat olleet heillä jo useamman vuoden ja hän tuntee oppilaat hyvin./	2 OPPILAIDEN VAHVA TUNTEMUS HELPOTTAA HAASTEIDEN TUNNISTAMISTA.
Hän kertoo, että he ovat tehneet oppilaille syksyllä Makekon [Matematiikan keskeisen oppiaineksen kokeet luokille 1–9], joka mittaa hänen mielestään lähes samanlaisia asioita. Makeko on sisällöltään laajempi, koska siinä on myös aikayksiköt ja murtoluvutkin mukana. Hän katsoo näitä tuloksia ja vertaa Makekon antamiin tuloksiin ja huomaa, että Makeko on palvellut hänen mukaan samaa asiaa. Hänen mielestään tutkimuksessa käytetyt mittarit ovat keskeistä sisältöä./	3 AIKAISEMMAT ARVIOINTIMENETELMÄT OVAT ANTANEET SAMANLAISIA TULOKSIA OPPILAIDEN TAITOTASOSTA. MITTAREIDEN TEHTÄVÄT OVAT KESKEISIÄ SISÄLTÖJÄ KYMMENJÄRJESTELMÄN HALLINNAN KANNALTA.
Mittarien tulokset vastaavat hänen käsitystään oppilaiden taitotasosta. Kun hän katsoo vielä erikseen löytääkseen mitään poikkeuksia, hän huomaan jon-	4 MITTARIEN TULOKSET VASTAAVAT OPETTAJAN KÄSITYSTÄ OPPILAIDEN TAITOTASOSTA, VAIKKA KOKONAISUUDESSAAN SUORITETUT

kun oppilaan suoriutuneen hänen käsityksen mukaan heikommin. Mutta hän toteaa samaan otteeseen, että nämä tulokset vastaavat hänen käsityksiään oppilaiden tämänhetkisistä taidoista. "Minulla on ihan sama käsitys, että nämä heikoimmat oppilaat kuuluvat tänne päähän ja hyvät oppilaat tänne päähän." [Heikoimmat oppilaat ovat mittarien tuloksissa alkupäässä ja paremmin menestyneet loppupäässä.]/	MITTARIT MENIVÄT OPPILAILTA ODOTETTUA HEIKOMMIN.
Hänen mukaan käytännössä nämä ovat juuri niitä peruslaskutoimituksia, joita oppilaiden pitää hallita. Hän kokee, että peruslaskutaidot ovat tärkeitä ja niiden osaaminen vaikuttaa vielä kuudennella luokallakin./	5 OPETTAJA KOKEE KYMMENJÄRJESTELMÄTAIDOT TÄRKEÄNÄ OSANA OPPILAIDEN PERUSLASKUTAITOJA, JONKA HALLITSEMINEN JA HALLITSEMATTOMUUS NÄYTTÄYTYY VIELÄ KUUDENNELLA LUOKALLAKIN.
Kertotaulujen osaamattomuus näkyy kuudennella luokallakin ja se hidastaa laskemista sekä peruslaskutoimituksia./	6 ERITYISESTI KERTOTAULUJEN OSAAMATTOMUUS HIDASTAA PERUSLASKUJEN HALLINTAA
Hän on nähnyt, että yleensä muutokset matematiikassa ovat aika pieniä, mutta joskus voi tulla myös positiivisiakin muutoksia oppimiseen./	7 MUUTOKSET MATEMAATTISTEN TAITOJEN KEHITYKSESSÄ OVAT USEIN PIENIÄ JA TAPAHTUVAT HITAASTI.

Osavaihe 3: Sisältöalueiden muodostaminen

Kun kaikki merkityssuhteet oli muunnettu merkityssuhde-ehdotelmiksi edellä olevan taulukon mukaisesti, muodostuivat lopulliset opettajien kokemuksia kuvaavat sisältöalueet ja niitä jäsentävät spesifit sisältöalueet. Avoimen ja reflektoivan lukemisen jälkeen muodostamani sisältöalueet pysyivät kuitenkin muuttumattomina aikaisempien sisältöalueiden kanssa. Sisältöalueita ei tule yhtenäistää, sillä tarkoituksena on hahmottaa kunkin ehdotelman omia merkityssisältöjä (Perttula 1995, 156; Perttula 2000, 436). Sisältöalueiden pilkkominen vielä spesifiin sisältöalueisiin antaa eriytyneempiä merkityksiä tutkittavan ilmiön kokonaisuudesta (Perttula 1995, 164). Lisäsin myös jokaisen opettajan merkityssuhde-ehdotelmaan oman värikoodin, jolloin hahmotin helpommin, oliko jokaisen opettajan merkityssuhde-ehdotelmia kussakin sisältöalueessa. Seuraavassa taulukossa on kokonaisuudessaan esitelty merkityssuhde-ehdotelmia jäsentävät sisältöalueet.

Taulukko 14. Kokemuksia kuvaavat sisältöalueet

Opettajan kokemuksia kuvaavat *sisältöalueet* ja niitä jäsentävät *spesifit sisältöalueet* (Vaihe II/3)
1) KOKEMUKSET OPPILAIDEN KYMMENJÄRJESTELMÄN HALLINNASTA Mittareiden tulosten vastaavuus oppilaiden taitotasoon ja oppilaiden tuntemus Kymmenjärjestelmän oppiminen Kymmenjärjestelmän oppimisen haasteet Kymmenjärjestelmän oppimista edistäviä tekijöitä Kymmenjärjestelmätaitojen opettaminen Kymmenjärjestelmätaitojen opettamisen haasteet
2) KOKEMUKSET OPPILAIDEN MITTAYKSIKÖIDEN MUUNNOSTEN HALLINNASTA Mittayksiköiden muunnosten oppiminen Mittayksiköiden muunnosten oppimisen haasteet Mittayksiköiden muunnosten oppimista edistäviä tekijöitä Mittayksiköiden muunnosten opettaminen Mittayksiköiden muunnosten opettamisen haasteet

Osavaihe 4: Merkityssuhde-ehdotelmien sijoittaminen sisältöalueisiin

Seuraavaksi sijoitin kunkin värikoodatun ja juoksevalla numerolla varustetun merkityssuhde-ehdotelma johonkin yllä olevista sisältöalueista. Sisältöalueisiin kootaan yhteen kaikki siihen liittyvät merkityssuhde-ehdotelmat (Perttula 2000, 436). Perttula (1995, 165) ohjeistaa sijoittamaan jokaisen tiivistetyn merkityssuhde-ehdotelman johonkin spesifiin sisältöalueeseen. Tutkimuksessa jokaiseen sisältöalueeseen tuli vähintään yksi merkityssuhde-ehdotelmaa jokaiselta opettajalta. Seuraavassa on esimerkki (opettaja 1) merkityssuhde-ehdotelmien sijoittamisesta spesifiin sisältöalueisiinsa:

Sisältöalue: Mittareiden tulosten vastaavuus oppilaiden taitotasoon ja oppilaiden tuntemus

1 Opettajalla on vuosien kokemus opetusalalta.
2 Oppilaiden vahva tuntemus helpottaa haasteiden tunnistamista.
3 Aikaisemmat arviointimenetelmät ovat antaneet samanlaisia tuloksia oppilaiden taitotasosta. Mittareiden tehtävät ovat keskeisiä sisältöjä kymmenjärjestelmän hallinnan kannalta.
4 Mittarien tulokset vastaavat opettajan käsitystä oppilaiden taitotasosta, vaikka kokonaisuudessaan suoritetut mittarit menivät oppilailta odotettua heikommin.

Sisältöalue: Kymmenjärjestelmän oppiminen

5 Opettaja kokee kymmenjärjestelmätaidot tärkeänä osana oppilaiden peruslaskutaitoja, jonka hallitseminen ja hallitsemattomuus näyttäytyvät vielä kuudennella luokallakin.
6 Erityisesti kertotaulujen osaamattomuus hidastaa peruslaskujen hallintaa.
7 Muutokset matemaattisten taitojen kehityksessä ovat usein pieniä ja tapahtuvat hitaasti.

Osavaihe 5: Sisältöalue-ehdotelmien muodostaminen

Merkityssuhde-ehdotelmista etenin sisältöalue-ehdotelmiin, joiden ydinsisällöt kuvasin yksi kerrallaan ja muodostin sisältöalue-ehdotelmia (Perttula 2000, 438). Analyysi etenee edelleen yksi tutkimusaineisto kerrallaan. Tässä vaiheessa asetetaan kunkin spesifin sisältöalueen osalta niihin sijoitetut merkityssuhde-ehdotelmat sisällöllisesti toistensa yhteyteen (Perttula 1995, 168). Seuraavassa kuvaan saman aineiston (opettaja 1) avulla kahden edellä mainitun sisältöalueen merkityssuhde-ehdotelmat, joista muodostuu yhtenäinen sisältöalue-ehdotelma:

> *Mittareiden tulosten vastaavuus oppilaiden taitotasoon ja oppilaiden tuntemus:* Opettajalla on vuosien kokemus opetusalalta. Oppilaiden vahva tuntemus helpottaa haasteiden tunnistamista. Aikaisemmat arviointimenetelmät ovat antaneet samanlaisia tuloksia oppilaiden taitotasosta. Mittarien tulokset vastaavat opettajan käsitystä oppilaiden taitotasosta, vaikka kokonaisuudessaan suoritetut mittarit menivät oppilailta odotettua heikommin. Mittareiden tehtävät ovat keskeisiä sisältöjä kymmenjärjestelmän hallinnan kannalta.
>
> *Kymmenjärjestelmän oppiminen:* Opettaja kokee kymmenjärjestelmätaidot tärkeänä osana oppilaiden peruslaskutaitoja, jonka hallitseminen ja hallitsemattomuus näyttäytyvät vielä kuudennella luokallakin. Erityisesti kertotaulujen osaamattomuus hidastaa peruslaskujen hallintaa. Muutokset matemaattisten taitojen kehityksessä ovat usein pieniä ja tapahtuvat hitaasti.

Osavaihe 6: Muodostetaan ehdotelma yleiseksi merkitysverkostoksi

Tässä vaiheessa suhteutetaan spesifien sisältöalueiden merkityssuhde-ehdotelmat keskenään ja edetään ehdotelmaan tutkittavan ilmiön yleiseksi merkitysverkostoksi (Perttula 2000, 438; Perttula 1995, 171). Muodostin sisältöalue-ehdotelmista ehdotelman tutkittavan ilmiön yleiseksi merkitysverkostoksi. Tällöin jokaisesta sisältöalue-ehdotelman kokonaisuudesta tein yhden ehdotelman yleiseksi merkitysverkostoksi, jolloin jokaisen opettajan ehdotelmista muodostui aina yksi ehdotelma liittyen opettajan kokemuksiin oppilaiden kymmenjär-

jestelmän hallinnasta ja yksi ehdotelma opettajien kokemuksista mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Erotin kappalejaolla sisältöalue-ehdotelmat toisistaan. Etsin oikeaa kuvaustapaa muokkaamalla ehdotelmaa yleiseksi merkitysverkostoksi useaan kertaan niin, että saavutin riittävän kiteytyneen yleisyystason. Perttulan (2000, 439) tämä voi perustua pitkälle tutkijan intuitioon, mutta tutkijan on kuitenkin noudatettava kurinalaisesti deskriptiivistä tutkimusasennetta. Seuraavassa esimerkkitapauksessa (opettaja 1) ehdotelma tutkittavan ilmiön eli opettajan koettu kudelma oppilaiden kymmenjärjestelmän hallinnasta yleiseksi merkitysverkostoksi.

> Opettajalla on vuosien kokemus opetusalalta. Oppilaantuntemus auttaa tunnistamaan haasteita. Mittarien tulokset vastaavat opettajan käsitystä oppilaiden taitotasosta, vaikka kokonaisuudessaan suoritetut mittarit menivät oppilailta odotettua heikommin. Kymmenjärjestelmätaitojen hallinta on tärkeä osa oppilaiden peruslaskutaitoja, jonka hallitseminen ja hallitsemattomuus näyttäytyvät vielä kuudennella luokallakin. Muutokset taitojen kehityksessä tapahtuu hitaasti, mutta pohjataidot luodaan jo varhain. Peruslaskutaitojen sujumattomuus ja tukeutuminen sormien käyttöön hidastavat suoriutumista matematiikassa. Peruslaskutaito on oltava vahva, jotta pystyy syventämään oppimistaan pitemmälle. Kymmenylitys ja kertotaulujen oppiminen ovat keskeisimpiä solmukohtia peruslaskutaitojen oppimisessa. Kymmenjärjestelmätaitojen oppimisessa on keskeistä ymmärtää käsitteet, joiden varaan ne rakentuvat. Matematiikan oppimista hidastavat hyvin monenlaiset ongelmat, aina lukivaikeuksista keskittymiskyvyn ongelmiin. Ympäristön tuki ja sosiaaliset tekijät näyttäisi olevan merkittäviä edesauttamaan matemaattisten taitojen kehitystä. Matematiikan ongelmien tiedostaminen, huomion kiinnittäminen oppilaiden taitoihin ja jatkuva arviointi tukevat oppilaiden matematiikan oppimista. Kymmenjärjestelmätaitojen opettamisessa korostuu väistämättä oppikirjojen merkitys. Erityisesti kirjasarjan sähköinen materiaali on tärkeässä osassa opetusta. Tukea tarvitsevien oppilaiden kanssa olisi keskityttävä kymmenjärjestelmätaitojen vahvistamiseen ja konkreettisten opetusmenetelmien hyödyntämiseen taitojen vahvistamiseksi. Koko ajan on silti olemassa ristiriita ja paine edetä oppikirjan antaman tahdin mukaisesti eteenpäin. (opettaja 1)

Osavaihe 7: Yleisen merkitysverkoston ja yleisen merkitysverkoston tyyppien muodostaminen

Analyysin viimeisessä vaiheessa jäsennetään ehdotelmat yleisiksi merkitysverkostoiksi, jolloin ei ole kyse enää ehdotelmasta, vaan empiirisen analyysin loppupisteestä. Jos kaikissa ehdotelmissa yleiseksi merkitysverkostoksi ei ilmenny samoja ydinmerkityksiä, on muodostettava useampi yleinen merkitysverkosto. (Perttula 2000, 439–440.) Integroidessa merkitysverkostoja toistensa yhteyteen otin huomioon kokemuksissa ilmenevää samankaltaisuutta ja eroavaisuutta. Luovun tässä tutkimuksessa absoluuttisesta yhden merkitysverkoston muotoilusta. Jokaisen opettajan ainutkertaisten ja yksilökohtaisten kokemusten tutkimista helpotti, kun jokaisella oli oma värikoodinsa allekkain asetettuna. Muodostin Perttulaa (2000,

440) mukaillen samankaltaisista opettajien kokemuksista yhden yleisen merkitysverkoston. Toisistaan eroavat kokemukset ja toisiinsa palautumattomat muunnelmat muodostivat tutkimukseni yleiset merkitysverkoston tyypit, joita oli yhteensä neljä. Analyysi on raportoitava, että siitä käy ilmi, mistä yksilökohtaisesta merkitysverkostosta muodostettu ehdotelma yleiseksi merkitysverkostoksi sisältyy mihinkin yleisen merkitysverkoston tyyppiin (Perttula 2000, 440).

6.4 Yhteenveto laadullisen tutkimuksen tuloksista

Esitän seuraavaksi laadullisen tutkimuksen analyysin tulokset opettajien kokemuksista oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Tulokset rakentuvat yhdestä yleisestä merkitysverkostosta ja neljästä yleisen merkitysverkostotyypistä, joissa on säilytetty koko ajan yhteys yksilökohtaisten merkitysverkostojen kanssa. Merkitysverkostot näyttäytyvät yhtenäisenä tarina, joiden perässä on viitetieto, mistä yksilökohtaisesta merkitysverkostosta tieto on johdettu.

Tutkimuksen yleinen merkitysverkosto

Opettajien vuosien työkokemus opetustyöstä ja tutkimukseen osallistuvien oppilaiden tuntemus kertovat, että oppilaiden matematiikan taitotaso tiedostetaan hyvin. Mittarien tulokset vastaavat opettajien käsityksiä oppilaiden taitotasosta. Mittarien tehtävät koostuvat kymmenjärjestelmän hallinnan kannalta keskeisistä sisältöalueista. Kymmenjärjestelmätaitojen hallinta on tärkeä osa oppilaiden peruslaskutaitoja. Kymmenjärjestelmätaitojen oppiminen ja automatisoituneet peruslaskutaidot ovat kulmakivi matemaattisten taitojen kehityksessä. Kymmenjärjestelmätaitojen opetuksessa korostuvat voimakkaasti oppikirjojen merkitys ja sähköisten materiaalien hyödyntäminen.

Mittayksiköiden muunnosten hallintaa mittaavat tehtävät menivät oppilailta heikoimmin. Tilavuuksia sekä pinta-aloja koskevat tehtävät jopa odotettua heikommin. Mittayksiköiden muunnosten hallinta on tärkeä taito osana oppilaiden peruslaskutaitojen hallintaa. Mittayksikköjärjestelmän ymmärtäminen on oppilaille haastavaa. Mittayksiköiden muunnoksia ei hallita riittävän hyvin ja oppilaiden taidot puutteellisia. Oppilaiden on vaikea ymmärtää erityisesti tilavuuden ja pinta-alan käsitteitä. Oppimista haastaa käsitteiden ulkoa opettelu, etenkin niiden opettelu koetta varten, jolloin oppilaiden mittayksikköjärjestelmän ymmärtämisen taidot eivät jää pysyviksi. Mittayksiköiden muunnosten opetus pohjautuu oppikirjan mukaisiin työskentelytapoihin. Konkreettiset- ja toiminnalliset opetusmenetelmät jäävät opetuksessa vähemmälle, joka osaltaan vaikuttaa taitojen puutteellisuuteen. Omakohtaisten ja monipuolisten arkipäivän kokemusten nähdään tukevan oppilaiden mittayksiköiden muunnosten ymmärtämistä. Näin oppimiseen tulee uudenlaista merkitystä ja oppilaiden motivaatio oppimiseen lisääntyy. Opettajat näkevät myös mittayksiköiden muunnosten opettamisen vaikeana. Mittayksiköiden muunnoksia tulisi palautella mieleen useam-

min lukuvuoden aikana, vaikka oppikirjojen mukaan ne opetellaan vain yhdessä jaksossa. Oppikirjojen osoittaman etenemistahdin vauhti ja aikapula asettavat haasteita monipuolisten opetusmenetelmien käyttöönottoon. (opettajat 1, 2, 3, 4)

Tutkimuksen yleiset merkitysverkostotyypit

Yleinen merkitysverkostotyyppi 1

Aikaisemmat arviointimenetelmät ovat osoittaneet, että kymmenjärjestelmän hallitseminen ja hallitsemattomuus näyttäytyvät vielä kuudennellakin luokalla. Muutokset taitojen kehityksessä tapahtuvat hitaasti, mutta pohjataidot luodaan jo varhain. Kymmenjärjestelmätaitojen oppimisessa on tärkeää ymmärtää käsitteet, joiden varaan ne rakentuvat. Kertotaulut ja kymmenylitys ovat keskeisimpiä solmukohtia matematiikan oppimisessa. Tukeutuminen sormien käyttöön hidastaa suoriutumista matematiikassa. Matematiikan oppimista hidastavat myös hyvin monenlaiset ongelmat, aina lukivaikeudesta keskittymiskyvyn ongelmiin. Ympäristön tuki, sosiaaliset tekijät, motivaatio ja asenne näyttäisivät olevan merkittäviä tekijöitä edesauttamaan matemaattisten taitojen kehittymisessä. Matematiikan ongelmien tiedostaminen, huomion kiinnittäminen oppilaiden taitoihin ja jatkuva arviointi tukevat oppilaiden matematiikan oppimista. Tukea tarvitsevien oppilaiden kanssa olisi keskityttävä kymmenjärjestelmätaitojen vahvistamiseen ja konkreettisten opetusmenetelmien hyödyntämiseen. Koko ajan on silti olemassa ristiriita ja paine edetä oppikirjan antaman tahdin mukaisesti eteenpäin.

Mittareiden tulosten paljastamat osaamisen puutteet mittayksiköiden muunnosten hallinasta eivät kaikissa tapauksissa johdu matematiikan oppimisvaikeuksista, vaan sen käsitteen ymmärtämättömyydestä. Erityisesti heikoille laskijoille yksiköiden muunnokset ovat täysin käsittämätön kokonaisuus, koska lukumääräkin kasvaa suureksi. Jatkuva mieleen palauttaminen ja mittayksiköiden ymmärtämisen tarpeellisuuden painottaminen oppilaille on tärkeää. Opettajien välinen yhteistyö, oppilaiden keskinäinen yhteistoiminnallisuus ja opetuksen ryhmittäminen ovat vaikuttaneet myönteisesti oppimiseen. Oppikirja ei välttämättä aina vastaa lasten mielenkiintoa. Lapsilla ei ole vielä tässä ikävaiheessa riittävää kypsyyttä ajatella näin abstraktitasolla. Koulussa pitäisi olla enemmän konkreettisia opetusmenetelmiä. Käytössä olevassa kirjasarjassa ei käsitellä ollenkaan mittayksikköjä deka ja hehto, jotka vaadittiin osattavaksi tutkimuksen mittareissa. Kyseiset mittayksiköt eivät ole oleellisia niiden harvinaisuuden vuoksi. Opettajan oppaat eivät anna selkeää kuvaa, mitä käsitteitä oppilaiden tulisi hallita. Määrärahojen puute ja suuret oppilasmäärät ovat haastava yhdistelmä. Erityisesti alakoulun matematiikan opettamisessa näkyy pienten ”nippeli” asioiden muistaminen. Ongelmaratkaisutaitojen kehittäminen ja kokonaisuuksien ymmärtäminen jäävät vähemmälle. (opettaja 1)

Yleinen merkitysverkostotyyppi 2

Mittari 1 (Kymppi-kartoitus 2) tehtävät sisältävät mekaanisia peruslaskutehtäviä, joista myös heikoimpien laskijoiden pitäisi suoriutua moitteettomasti. Lukujen pyöristämisen osaamattomuus ja odotettua heikompi tulos yllättävät. Jää epäselväksi, mistä tämä johtuu. Osaamisen näyttää vaihtelevan. Siinä on ymmärrettävä systeemi, johon se perustuu. Kertotaulujen osaaminen pohjustaa monia matemaattisia taitoja. Taitojen perusteellinen opettaminen ja monipuoliset harjoitteet sekä ratkaisumallit ovat avainasemassa. Haasteena on saada oppilaiden taidot riittävän pysyviksi. Tukiopetus rajoittuu tällä hetkellä ennen koetta annettuun tukiopetukseen. Tukiopetus voisi antaa yhden

keinon kohdistaa yksilöllistä tukea ja vahvistaa kymmenjärjestelmätaitoja. Erityisopettajan tukea on tarjolla. Erityisopetuksessa on tärkeää keskittyä peruslaskutaitojen vahvistamiseen. Konkreettiset välineet ovat kuudennella luokalla harvinaisempia. Lisätehtävät ja taitojen arvioiminen yksittäisestä opitusta asiasta kerrallaan on hyödyllistä. Opettajan oppaiden avulla saa yhdenlaisen käsityksen, miten kymmenjärjestelmää tulisi opettaa. Opetuksessa tehtäviä vaiheistetaan ja palautetaan mieleen yhdessä taululle. Opetustilanteen jälkeen oppilaat tekevät itsenäisesti tehtäviä kirjasta. Yksittäiset oppilaat tarvitsevat opettajan tukea.

Pinta-aloja ja tilavuuksia mittaavien tehtävien tulokset (Mittayksikkö-kartoitus 2) yllättävät, koska myös kiitettävän oppilaat ovat suoriutuneet niistä heikosti. Koetilannekin on saattanut vaikuttaa. Oppilaat oppivat yleensä luettelemaan ulkoa mittayksiköiden järjestyksen, mutta eivät ymmärrä mittayksiköiden muunnoksiin liittyvää systeemiä. Ei ole varmuutta siitä, miksi oppilaat hallitsevat mittayksiköiden muunnokset niin heikosti. Mittayksiköiden muunnoksissa on muistettava useita asioita. Muunnosten tekeminen yksiköistä toiseen on vaikea ymmärtää. Kyse on täysin käsitteen ymmärtämisestä. Oppilaat oppivat systeemin, että lisätään yksi nolla perään siirryttäessä vierekkäiseen yksikköön tai otetaan yksi nolla pois siirryttäessä pienemmästä yksiköstä suurempaa kohti. Virhepisteet paljastavat, että pahimmassa tapauksessa kaikki tehtävät on tehty väärin. Konkreettiset keinot, esimerkiksi pinta-alojen mittaaminen luokan ulkopuolellakin sekä konkreettiset muistikuvat perusyksiköistä edistäisivät oppimista. (opettaja 2)

Yleinen merkitysverkostotyyppi 3

Mittareissa hyvin menestyneiden joukossa on lahjakkaimpia oppilaita kuin koskaan, mutta joidenkin oppilaiden arveltua heikommat tulokset yllättävät. Erityisesti lukujen pyöristämiseen liittyvien tehtävien arveltua heikommat tulokset yllättävät, koska pyöristämisen ei pitäisi olla oppilaille vaikea. Niitä on kuitenkin opeteltu. Kymmenjärjestelmätaidot arvioidaan oppilaiden osaavan keskitasoisesti. Haasteena on, että matematiikan opetus kulkee liian abstraktitasolla. Oppikirjat ja opettajan oppaat määräävät tahdin, huolimatta opetussuunnitelmasta. Haastavaa on irrottautua oppikirjan mukaisesta työskentelytavasta. Oppikirja antaa toimintamallin, mutta opettajasta itsestä on paljon kiinni, miten painottaa oppikirjan suunnitelmia. Konkreettiset materiaalit ja havainnollistamisvälineet edistävät oppimista ja niitä tulisi käyttää enemmän hyödyksi. Pääsääntöinen ja jatkuva tuki kohdistuu tällä hetkellä enemmän äidinkieleen, mutta koetta ennen myös matematiikkaan.

Mittarien tehtävät liittyen mittayksiköiden muunnoksiin vastaavat mekaanisia perusasioita, joita jo neljännen luokan oppilaidenkin pitäisi osittain hallita. Mittayksiköiden muunnosten hallinta on yksi vaikeimmista matematiikan osa-alueista prosenttilaskujen ohella. Aikaisempien kokeidenkin tulokset osoittavat, että oppilailla on paljon puutteita taidoissa ja he ovat arvailleet tehtävien vastauksia. Maalaisjärkikin on unohtunut, koska helpoimmat perusyksiköt pitäisi osata opettamattakin. Peruslaskutoimituksissa olevien ongelmien lisäksi oppilaiden on vaikea ymmärtää mittayksiköihin liittyvää systeemiä ja suhdelukua. Mittayksiköiden muunnoksia ei käsitetä varsinkaan, kun on kyse yksiköiden äärilaidoista. Oppilailla on nähtävissä motivaation puutetta. Oppilaat eivät koe tarpeelliseksi hallita mittayksiköiden muunnoksia. Oppikirjojen mukainen mekaaninen oppiminen, pilkun siirtämisen tekniikka ja taulukointi eivät lisää välttämättä oppilaiden ymmärrystä mittayksiköiden muunnoksissa. Muistisään-

töjen opettaminen on kyllä tärkeää. Opettamisessa korostuvat opettajan työskentelytapa ja ratkaisumallien esittäminen. Monipuolisten mittaamiseen liittyvien kokemusten ankkuroiminen arkipäivään lisäisi ymmärrystä ja myös motivaatio oppimiseen kasvaisi. Mittayksikköjärjestelmään liittyvän suhdeluvun opettaminen ja sen ymmärtäminen on merkittävä tekijä. Käytännöllisten työskentelytapojen puuttuminen opetuksesta hidastaa mittayksiköiden muunnosten oppimista. Opettajalla on koko ajan tunne, että enemmän pitäisi pystyä oppilaiden kanssa tekemään. Vauhti on kova, vaikka mittayksiköiden muunnosten tiedetään vaativan jopa kaksinkertaisen ajan oppiakseen. Myös puutteelliset opetustaidot saattavat olla esteenä oppilaiden mittayksiköiden muunnosten ymmärtämisessä. (opettaja 3)

Yleinen merkitysverkostotyyppi 4

Joitakin yllätyksiä etenkin odotettua heikommasta tai jopa paremmista tuloksista on mittareiden tuloksista nähtävissä. Oppilaiden tuen tarve matematiikkaan on tiedossa. Kymmenjärjestelmätaitojen puutteet ja laskemisen työläys näyttävät vaivaavan vielä kuudennellakin luokalla ja heijastavat vaikeuksia monenlaiseen matematiikan oppimiseen. Kymmenylitys, kertotaulut ja mittayksiköiden muunnokset ovat keskeisiä solmukohtia. Toiminnanohjauksen, hahmottamisen ja kielelliset pulmat vaikuttavat matematiikan oppimiseen. Keskittymiseen liittyvät haasteet selittävät myös osan oppimista. Oppiminen on hyvin vaihtelevaa, eivätkä taidot jää pysyviksi. Oppilaan tuntemus auttaa taitojen arvioinnissa. Opettajan rooli korostuu oppilaiden käsitysten luomisessa matematiikkaa kohtaan. Opettajan oma innostus ja kiinnostus matematiikkaa kohtaan vaikuttavat myönteisesti oppilaiden matematiikan oppimiseen. Motivaatiolla ja asenteella on merkittävä vaikutus matematiikan oppimiseen. Myönteinen asenne matematiikkaa kohtaan auttaa selkeästi oppilasta kehittymään taidoissaan. Kodin tuella on laajasti katsottuna valtava merkitys. Tukiopetuksen merkitys etenkin heikoimmilla oppilailla korostuu. Laskutoimituksia havainnollistamat menetelmät, kuten lukujen hajottaminen ja lukuparien opettaminen auttavat laskutaidon sujuvuudessa. Näin rakentuu yksi oivallinen linkki konkreettisten materiaalien käyttöön. Matematiikan puhumisella on tärkeä merkitys matematiikan ajattelun kehittämisessä. Matemaattisten käsitteiden, vaiheiden ääneen puhumisella ja oman ajattelun näkyväksi tekeminen vaikuttavat myönteisesti oppilaiden matematiikan oppimiseen. Isompien oppilaiden kohdalla on vaikea hahmottaa, miten oppilaat lopulta hallitsevat kymmenjärjestelmää. Oppilaskohtaisesti on järkyttäviä puutteita peruslaskutaidoissa. Konkreettiset keinot keskittyvät enemmän kuitenkin alkuopetuksen puolelle. Opettajan tulee tiedostaa omat mahdollisuudet irrottautua orjallisesta oppikirjojen mukaisesta työskentelytavasta. Konkretian merkitys on tiedossa, vaikka toteutus jää usein vain suunnitteluasteelle. Materiaalin pitäisi olla helposti saatavilla ja omassa luokassa.

Mittayksiköiden hallintaan liittyvien tehtävien sisältö vaativat niiden osaamista ihan käsitteellisellä tasolla sekä kehittynyttä ajattelua, joita jotkut oppilaat hallitsevat jo luonnostaan. Kymmenjärjestelmän osaamisen merkitys korostuu juuri mittayksiköiden muunnosten osaamisessa. Konkreettisten menetelmien pitää olla rajattua ja päättäväistä sekä materiaalit helposti saatavilla. Mittayksiköiden käsitteiden oppimista helpottavat ääneen puhuminen ja erilaisten mielikuvien käyttäminen. Oppikirjan tehtävien eriyttäminen erityisesti heikommilla oppilailla on tärkeää. Tämä mahdollistaa myös konkreettisten opetusmenetelmien käytön. Peruskoulu perustuu kehään, jossa nopean etenemistahdin lisäksi myös paljon kerrataan aikaisemmin opittuja asioita. Yksinkertaisten välineiden, kuten viivoittimen käyttö on aika tyypillistä opetuk-

> sessa. Erilaisista tiloista ja pinta-aloista puhuminen auttavat hahmottamaan mittayksiköitä. Kuudennen luokan oppilaita pidetään helposti todellisuutta vanhempina. Kaikki isompien oppilaiden oppikirjamateriaalitkaan eivät inspiroi opettajaa konkretian käyttöön. Toisaalta matematiikka oppiaineena ymmärretään olevan monelle oppilaalle myös rauhoittumisen keino. Kirjatyöskentely, erityisesti matematiikka osaavilla oppilailla, saattaa olla hyvinkin motivoiva, mutta arvailun varaan jää, mitä siitä todellisuudessa oppii. Oppikirjojen mukaisen tahdin säilyttämisen pakottava tunne asettaa opetukseen alituisen kiireen tuntuman. Toiminnallinen opetus vie kuitenkin paljon aikaa. Opettajalla saattaa syntyä tunne, ettei ole saavuttanut riittäviä tavoitteita, mikäli on jättänyt noudattamatta kirjan mukaista tahtia. Loppujen lopuksi konkreettisen opetuksen hyödyntämisessä on vain opettaja itse esteenä. (opettaja 4)

Jokainen yleinen merkitysverkosto on koottu myös taulukoksi, johon on kerätty keskeiset ja tiivistetyt tutkimustulokset sisältöalueittain. Seuraavassa kooste keskeisistä tuloksista yleisen merkitysverkoston osalta

Taulukko 15. Yleisen merkitysverkoston keskeiset piirteet sisältöalueittain (opettajat 1, 2, 3, 4)

KYMMENJÄRJESTELMÄN HALLINTA		
1. Taitotaso ja oppilaantuntemus	**2. Oppiminen**	**5. Opettaminen**
• pitkä työkokemus • oppilaantuntemus vahva • taitotason tuntemus • tulokset vastaavat opettajien käsityksiä	• keskeistä sisältöä • tärkeä osa peruslaskutaitoja • kulmakivi matemaattisten taitojen kehityksessä	• oppikirjojen merkitys voimakas • sähköiset materiaalit

MITTAYKSIKÖIDEN MUUNNOSTEN HALLINTA				
7. Oppiminen	**8. Oppimisen haasteet**	**9. Edistävät tekijät**	**10. Opettaminen**	**11. Opettamisen haasteet**
• odotettua heikommat tulokset • tärkeä taito • osa peruslaskutaitoja	• mittayksikköjärjestelmä ja sen käsite vaikea ymmärtää • tilavuuden ja pinta-alan käsitteen vaikeus • taidot puutteelliset • taidot eivät pysyviä • opettelu ulkoa • opettelu koetta varten	• konkreettiset menetelmät tukevat käsitteen ymmärrystä • omakohtaiset kokemukset lisäävät motivaatiota • mieleen palauttaminen useammin	• oppikirjojen mukaiset työskentelytavat vallitsevia	• konkreettiset menetelmät vähäisiä • opettaminen vaikeaa • etenemistahti • aikapula

Seuraavaan taulukkoon on puolestaan koottu yleisen merkitysverkostotyyppien keskeiset piirteet kymmenjärjestelmän hallinnan osalta.

Taulukko 16. Yleisen merkitysverkostotyyppien keskeiset piirteet kymmenjärjestelmän hallinnasta (opettajat 1, 2, 3 ja 4)

KYMMENJÄRJESTELMÄN HALLINTA					
Merkitys-verkostot	**2. Oppiminen**	**3. Oppimisen haasteet**	**4. Edistävät tekijät**	**5. Opettaminen**	**6. Opettamisen haasteet**
Opettaja 1	• hallitseminen ja hallitsemattomuus näkyvät vielä kuudennellakin luokalla • käsitteen ymmärtämisen merkitys	• muutokset hitaita • kertotaulut ja kymmenylitys solmukohtia • tukeutuminen sormiin • oppimista hidastavat monenlaiset ongelmat • lukivaikeudet • keskittymiskyvyn ongelmat	• ympäristön tuki • sosiaaliset tekijät • motivaatio ja asenne • ongelmien tiedostaminen • jatkuva arviointi • oppilaantuntemus	• kymmenjärjestelmätaidot vahvaksi • konkreettiset opetusmenetelmät oppikirjojen rinnalla	• paine edetä oppikirjan tahdin mukaisesti
Opettaja 2	• mekaanisia peruslaskutehtäviä	• lukujen pyöristäminen • osaaminen vaihtelee • taitojen pysyvyys • systeemin ymmärtäminen	• kertotaulujen sujuvuus • perusteellinen opetus • monipuoliset harjoitteet • yksilöllinen tuki¨ • taitojen vahvistaminen • erityisopettajan tuki	• konkreettisia menetelmiä harvoin • lisätehtävät • taitojen arvioiminen yksittäisestä asiasta kerrallaan • tehtävien vaiheistaminen • mieleen palauttaminen • kirjatyöskentely itsenäisesti	• tukiopetus ennen koetta • opettajan oppaissa rajattu käsitys
Opettaja 3	• arveltua heikommat tulokset yllättivät • kymmenjärjestelmätaidot keskitasoa	• lukujen pyöristämien	• konkreettisia opetusmenetelmiä tulisi hyödyntää	• oppikirjat määräävät tahdin huolimatta opetussuunnitelmasta	• opetus liian abstraktitasolla • irrottautuminen oppikirjasta • tukiopetus ennen koetta
Opettaja 4	• tulokset yllättivät • taitojen puutteet ja laskemisen työläys näyttäytyvät vielä kuudennellakin luokalla • oppiminen vaihtelevaa	• kymmenylitys ja kertotaulut solmukohtia • toiminnanohjaus • hahmottaminen • kielelliset pulmat • keskittymiskyvyn haasteet • puutteet peruslaskutaidoissa	• tuen tarve tiedossa • oppilaantuntemus • opettajan rooli • motivaatio ja asenne • kodin tuki • tukiopetus • lukujen hajottaminen ja lukuparit • materiaalit helposti saatavilla	• matematiikan puhuminen • oman ajattelun näkyväksi tekeminen • vaiheistaminen • tulee tiedostaa irrottautuminen oppikirjasta	• isompien kohdalla vaikea hahmottaa taitotaso • konkreettiset keinot enemmän alkuopetuksessa • konkretian merkitys tiedossa

Seuraavassa taulukossa on kooste yleisen merkitysverkostotyyppien keskeiset piirteet mittayksiköiden hallinnan kannalta.

Taulukko 17. Yleisen merkitysverkostotyyppien keskeiset piirteet mittayksiköiden muunnosten hallinnasta (opettajat 1, 2, 3, ja 4)

MITTAYKSIKÖIDEN MUUNNOSTEN HALLINTA					
Merkitys-verkostot	**7. Oppiminen**	**8. Oppimisen haasteet**	**9. Edistävät tekijät**	**10. Opettaminen**	**11. Opettamisen haasteet**
Opettaja 1	• heikoille laskijoille täysin käsittämätön kokonaisuus • käsitteen ymmärtäminen	• lukumäärät kasvavat suureksi	• tarpeellisuuden painottaminen • opettajien keskinäinen yhteistyö • yhteistoiminnallisuus • opetuksen ryhmittäminen • enemmän konkreettisia menetelmiä	• paljon pientä ”nippeli” asiaa • ongelmaratkaisutaidot ja kokonaisuuksien ymmärtäminen sekä opettaminen vähemmällä	• ei riittävää kypsyyttä ajatella abstraktitasolla • oppikirjat eivät opeta mittayksikköjä deka ja hehto • opettajan oppaista ei selkeää kuvaa • oppikirja ei vastaa lasten mielenkiintoa
Opettaja 2	• kiitettävien oppilaiden heikko suoritus yllätti	• koetilanne • systeemin ymmärtämättömyys • käsitteen ymmärtäminen • paljon muistettavaa • muunnosten tekeminen yksiköstä toiseen	• konkreettiset keinot	• muistisäännöt	• nollien lisääminen • epävarmuus taitojen puutteista
Opettaja 3	• mekaanisia perusasioita, jotka tulisi hallita • käsitteen ymmärtäminen	• yksi vaikeimmista osa-alueista prosenttilaskujen ohella • tehtävien arvaileminen • maalaisjärjen unohtaminen • systeemin ja suhdeluvun ymmärtäminen • motivaation puute	• opettajan työskentelytavat • ratkaisumallit • monipuoliset mittauskokemukset • suhdeluvun opettaminen	• muistisäännöt	• mekaaninen opettaminen, pilkun siirtämisen tekniikka ja taulukointi eivät lisää ymmärrystä • käytännölliset työskentelytavat puuttuvat • nopea tahti • puutteelliset opetustaidot

Opettaja 4	• kymmenjärjestelmän osaaminen merkitys korostuu • vaativat käsitteen ymmärtämistä ja kehittynyttä ajattelua	• mittayksiköiden muunnokset solmukohta	• konkretia rajattua ja helposti saatavilla • matematiikan puhuminen ja erilaiset mielikuvat • tehtävien eriyttäminen	• paljon kerrataan • yksinkertaiset välineet, kuten viivoittimet • tiloista ja pinta-aloista puhuminen • kirjatyöskentely rauhoittaa ja joillekin motivoiva	• nopea etenemistahti • oppilaita pidetään todellisuutta isompina • kaikki oppikirjamateriaalit eivät inspiroi konkretian käyttöön • tahdin säilyttäminen luo kiireen tuntumaa ja synnyttää tunteen riittämättömästä tavoitteiden saavuttamisesta • toiminnallinen opetus vie aikaa • opettaja itse esteenä

7 JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA

Tässä luvussa tarkastelen tutkimusaineistosta nousseita päätuloksia peilaten niitä aikaisempiin tutkimuksiin. Kokoan yhteen määrällisen ja laadullisen aineiston keskeiset tulokset niin, että ne edustavat toisiaan täydentävinä tulkintoina. Pohdin tutkimukseni käytännön merkitystä ja jatkotutkimusmahdollisuuksia sekä palaan tutkimusprosessin arviontiin tarkastelemalla tutkimuksen luotettavuutta ja eettisiä näkökulmia.

7.1 Johtopäätökset

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää määrällisen menetelmin, miten kuudennen luokan oppilaat hallitsevat kymmenjärjestelmää ja mittayksiköiden muunnoksia. Määrällisestä aineistosta nousseiden tulosten valossa tutkimuksessa selvitettiin myös fenomenologista tutkimusotetta hyödyntäen, minkälaisia kokemuksia opettajilla on oppilaiden kymmenjärjestelmätaitojen ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Tässä vaiheessa yhdistän johtopäätösten muodossa molempien aineistojen keskeiset tulokset käsitellen niitä yhdessä niin, että ne toimivat toisiaan tukevina ja täydentävinä tulkintoina. Tarkastelen määrällisestä aineistosta, yleisestä merkitysverkostosta ja merkitysverkostotyypeistä nousseita keskeisiä tuloksia ja näkökulmia esittäen vertailukohtia aiempaan tutkimustietoon. Johtopäätökset on jaoteltu seuraavasti 1) kymmenjärjestelmän hallinta ja opettajien kokemukset oppilaiden kymmenjärjestelmän hallinnasta, 2) mittayksiköiden muunnosten hallinta ja opettajien kokemukset oppilaiden mittayksiköiden muunnosten hallinnasta.

7.1.1 Kymmenjärjestelmän hallinta ja opettajien kokemukset oppilaiden kymmenjärjestelmän hallinnasta

Tutkimuksessa käytetyn Kymppi-kartoitus 2:n tulokset viittaavat, että kuudennen luokan oppilailla on puutteita kymmenjärjestelmän hallinnassa. Juuri julkaistut vuoden 2015 TIMSS-tutkimukset osoittavat, että Suomen peruskoululaisten menestyminen peruslaskutaidoissa (luvut ja laskutoimitukset -osa-alueella) on entisestään heikentynyt (Vettenranta ym. 2016, 30). Myös tämän tutkimuksen tulokset paljastivat, että ainakin puolella oppilaista oli jonkin tason vaikeuksia kymmenjärjestelmän hallinnassa. Tulosten perusteella voidaan osoittaa, että lukujärjestelmän hallinta on yksi keskeisimpiä taitoalueita peruslaskutaitojen lisäksi. Tämän vahvistavat myös Aunio ja Räsänen (2016, 695, 699) pitkittäistutkimuksellaan lasten

matemaattisten taitojen kehityksestä. Tutkimustulokset matemaattisten taitojen hierakkisuudesta kertovat, että aikaisemmilla tiedoilla ja taidoilla on iso merkitys matemaattisten taitojen ja kymmenjärjestelmätaitojen rakentumisessa (Clements & Sarama 2011, 968; Hannula & Lepola 2006, 131). Kymppi-kartoitus 2:n tulosten valossa tulee kiinnittää erityistä huomiota, että haasteet näyttäytyivät juuri kymmenjärjestelmän periaatteiden ja paikka-arvon käsitteen ymmärtämisen ongelmina. Van de Wallen ym. (2014) mukaan oppilaan tulee ymmärtää, miten kymmenjärjestelmän luvut määrällisinä koostuvat ja osata käsitellä niitä myös sen mukaisesti. Tämä edellyttää käsitystä lukujärjestelmän säännöistä ja periaatteista niin puhutussa kuin kirjoitetussakin kielessä. (Van de Walle ym. 2014, 204–215.)

Oppilaiden virheet desimaaliluvuissa ja niihin liittyvissä laskutoimituksissa paljastavat, että oppilas ei ole ymmärtänyt lukujen välisiä suhteita, jolloin on vaikea mieltää, mitä kymmenesosat, sadasosat ja tuhannesosat ovat ja miten ne suhteutuvat toisiinsa. Epävarmuus desimaalipilkun käsittelyssä ja desimaalilukujen pyöristämisessä oli selkeästi nähtävissä oppilaiden virhetyypeissä. Myös opettajat (merkitysverkostotyypit 1 ja 3) kokevat kyseisten taitojen olevan juuri niitä ongelma-alueita, jotka paljastavat kymmenjärjestelmän käsitteen hallitsemattomuuden. Tämä saa tukea myös useista kansainvälisistä tutkimuksista (mm. Van de Walle 2014, 360–362; Lawton 2014, 100). Huomattava määrä oppilaita merkitsi luvun 0,125 suuremmaksi kuin luvun 0,50. Virheitä tuskin olisi tullut, jos luku 0,50 olisi merkitty 0,500. Pyöristämiseen liittyvät virhetyypit kertovat, että oppilaat eivät ole ymmärtäneet paikka-arvon merkitystä. Tehtävät edellyttävät vahvoja lukujenkäsittelytaitoja, jolloin oppilaan tulee ymmärtää lukuja, osata rakentaa lukuja, verrata niitä toisiinsa ja vielä pyöristää niitä pyöristämiseen liittyvien sääntöjen mukaisesti (ks. Hannula & Lepola 2006, 135–136). Tehtävässä suoriutuminen ja käsitteiden oppiminen edellyttävätkin Ikäheimon (2012, 12–24) mukaan pureutumista lukujärjestelmän konkreettiseen havainnollistamiseen.

Yleisestä merkitysverkostosta ilmenee, miten kaikki opettajat pitävät kymmenjärjestelmän hallintaa perustavanlaatuisena taitona, jonka osaaminen korostuu laajasti matematiikan osaamisessa ja laskutaidon kehittymisessä. Opettajat (merkitysverkostotyypit 1, 3 ja 4) mieltävät, että kymmenjärjestelmän periaatteen ymmärtäminen on yksi solmukohdista. Opettajia huolestuttaa tutkimustulosten valossa oppilaiden odotettua heikompi kymmenjärjestelmätaitojen hallinta. Ikäheimoa (2012, 6–8) ja Ikäheimoa & Riskua (2004, 223–229) mukaillen voidaan kiteyttää, että matematiikan osaaminen tarvitsee vahvan perustan, matemaattisten valmiuksien ja käsitteiden systemaattista pureutumista oppimisen ydinkohtiin. Erityinen huoli kohdistuu tässä tutkimuksessa niihin vajaan viidennekseen (19%) oppilaista, joiden

kymmenjärjestelmäntaitojen osaaminen on jo merkittävästi heikkoa tai niissä on ainakin vakavia puutteita. Matematiikan uusien sisältöjen omaksuminen vaikeutuu huomattavasti, jos Ikäheimon (2012) luonnehtimaan matematiikan perustukseen jää aukkoja. Räsäsen (2012, 1168) mukaan laskutaidolla on merkittävä yhteiskunnallinen vaikutus erityisesti työllistymisen näkökulmasta, mutta myös arkielämän sujumisen kannalta. YLE uutisoi (28.3.2017) huolestuttavia merkkejä suomalaisten nuorten matematiikan osaamistason laskusta. Diplomi-insinöörien koulutukseen hakeneiden määrä jyrkässä laskussa. Tämä kertoo siitä, että yhä heikommat matematiikan taidot rajoittavat hakeutumista kyseiselle alalle, vaikka palkkataso ja työllisyys on alalla hyvä. (http://yle.fi/uutiset/3-9519967.)

Opettaja (merkitysverkostotyyppi 2) kuvailee osuvasti, miten oppilaiden kymmenjärjestelmän osaaminen vaihtelee ja haasteena on saada oppilaiden taidot riittävän pysyviksi. Kyseinen opettaja vertaa kymmenjärjestelmän oppimista eräänlaisen systeemin oppimiseksi, johon koko ymmärtäminen perustuu. Opettajan kuvaaman systeemin ymmärtäminen edellyttääkin Haylockin ja Cockburnin (2008, 12) sekä Lawtonin (2014, 23) tutkimuksissa esiintyvien keskeisten kymmenjärjestelmän hallintaa ohjaavien periaatteiden käsittämistä, kuten paikka-arvon, ryhmittelyn ja vaihtamisen, lukusanojen ja numerosymbolien yhteyksien sekä nollan ilmaisen tyhjän lukuyksikön perusteellista omaksumista. Kymppi-kartoitus 2:n tehtävät ovat rakenteelta ja sisällöltään ensinnäkin keskeisiä kymmenjärjestelmän hallinnan kannalta, mutta toisaalta niissä on nähtävissä myös taitojen puutteita paljastava ominaisuus (Ikäheimo 2015a, 5). Oppilaiden tekemät virhetyypit paljastavat, onko kymmenjärjestelmän hallinta opittu vain mekaanisena ja rutiininomaisena taitona vai perustuuko vankka osaaminen jo varhaisiin käsitteenmuodostusprosessissa esiintyviin taitotekijöihin. Merkille pantavia virheitä ja viitteitä pinnallisesta ulkoa opettelemisen tavoista esiintyi hyvinkin perustavanlaatuisissa kymmenjärjestelmää ja paikkajärjestelmää mittaavissa tehtävissä, jossa oppilaiden tuli kertoa tai jakaa annettu luku kymmenellä.

Opettajat (merkitysverkostot 1 ja 2) näkevät oppilaiden kymmenjärjestelmätaitojen edistävänä tekijänä panostamisen perusasioiden vankkaan hallintaan. Oppimista edistää, kun pohjataidot luodaan vahvaksi ja niihin pureudutaan perusteellisesti. Koposen (2012) mukaan sujuva peruslaskutaito määrittelee pitkälle matematiikan oppimisen työläyttä tai helppoutta. Hyvää peruslaskutaitoa voidaan rinnastaa sujuvaan lukutaitoon, jolla on keskeinen merkitys myöhempään matematiikan oppimiseen. (Koponen 2012, 59.) Oppilaiden Kymppi-kartoitus 2:ssa käytetyn ajan ja tehtävien tekemisessä käytetyn ajan (ks. Kuvio 8) välistä suhdetta tut-

kiessa voidaan todeta, että hyviä pistemääriä saavuttaneet oppilaat käyttivät vähemmän aikaa tehtävien tekemiseen. Tämä viittaa siihen, että automatisoituneilla ja sujuvilla peruslaskutaidoilla on erityinen merkitys myöhempien matemaattisten taitojen karttumiseen. Tehtävien tekeminen on työlästä, uuden oppiminen on hankalaa, jos matematiikan perusteissa on puutteita. Koponen (2012, 59) pitääkin kehittyneiden laskustrategioiden tukemista merkittävänä tekijänä laskutehtävissä suoriutumiseen. Ikäheimon (2012, 39–53) mukaan tällaisia tärkeitä ja harjoiteltavia strategioita ovat mm. kymppiparit, lukujen hajotelmat, tuplat ja melkein kuin tuplat sekä niiden käyttö eri analogioiden avulla.

Opettajien (merkitysverkostot 1, 3 ja 4) puheesta välittyy, että konkreettisilla materiaaleilla ja välineillä on kymmenjärjestelmän oppimista edistävä vaikutus, mutta he kaipaisivat enemmän toimintamateriaalien käyttöä opetukseensa. Opettajat (merkitysverkostot 2 ja 3) käyttävät joko harvoin tai ei ollenkaan enää isommilla oppilailla (viittaa kuudennen luokan oppilaisiin) konkreettisia välineitä kymmenjärjestelmän opettamisessa. Konkreettiset käsitteenmuodostusvälineet ovat niin heikkojen, hitaiden kuin hyvien ja lahjakkaidenkin oppilaiden kognitiivisia työkaluja, sillä jokaisen oppilaan ikätasoinen matematiikan ymmärtäminen perustuu omakohtaisiin kokemuksiin (Korhonen 2003, 39). Joutsenlahden ja Vainionpään (2010) mukaan toimintamateriaalit koetaan alakoulun matematiikan opetuksessa tärkeinä, sillä yli 70% opettajista nimesi tutkimuksessa matematiikan oppimismateriaalit tärkeiksi. Sinänsä kyllä oppikirjat ja opettajan oppaat edustivat tässäkin tutkimuksissa merkittävää roolia matematiikan opetuksessa, mikä on myös aikaisemmissa kotimaisissa tutkimuksissa (mm. Perkkilä 2002; Törnroos 2004) vahvasti todistettu. (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 137–138.) Oppilaiden virhetyypit paljastavat, että erityisesti desimaalilukujen vertailu, lukujonojen jatkaminen tai lukujen pyöristäminen vaatisivat niiden systemaattista konkretisointia käsitteenmuodostusvälineillä kymmenjärjestelmän periaatteen ja paikka-arvokäsitteen selkiyttämiseksi.

Opettajien (merkitysverkostot 1 ja 4) kokemuksista ilmenee, että oppilaiden asenteella ja motivaatiolla matematiikkaa kohtaan on merkitystä. Oppilaan matematiikan oppimisen ilo ja innostuneisuus vievät oppimista eteenpäin. Asenteita matematiikkaa kohtaan on tutkittu paljon. Kuparin (2006) tutkimukset osoittavatkin selvästi, että myönteisesti matematiikkaa kohtaan suhtautuvat oppilaat saavuttavat parempia oppimistuloksia kuin negatiivisesti suhtautuvat. Matematiikka-asenteiden ja suoritusten välinen yhteys on myös kaksisuuntainen, sillä matematiikassa menestyvät oppilaat mitä todennäköisemmin pitävät matematiikasta ja

kokevat halun oppia sitä. (Kupari 2006, 127–140.) Vuoden 2011 ja 2015 TIMSS -tutkimukset osoittavatkin, että suomalaisten lasten matematiikan asenteissa on huomattavaa parantamisen varaa (Kupari ym. 2012, 50; Vettenranta ym. 2016, 59). PISA ja TIMSS -tutkimukset ovat osoittaneet, että matematiikan oppimiseen on vaikuttamassa useita eri tekijöitä, kuten motivaatio, tunteet, sitoutuneisuus ja oppilaan minäkäsitys sekä luottamus omiin kykyihin (Kupari ym. 2012, 120; Välijärvi & Kupari 2015). Opettajan (merkitysverkosto 4) mukaan oppilaan matematiikan oppimista kuin kymmenjärjestelmän hallintaakin edistävät perheen mahdollisuudet tukea ja kannustaa lastaan opinnoissaan. Vanhempien käyttäytymistavoilla, osallistumisella ja tuen antamisen mahdollisuuksilla on tutkimuksissa havaittu selkeitä yhteyksiä lapsen koulumenestykseen (Lukin 2013, 30–31).

Kaikkien opettajien (yleinen merkitysverkosto) kokemuksista ilmenee, että kymmenjärjestelmän opettamisen lähtökohdat mukailevat pitkälle matematiikan oppikirjojen mukaista rakennetta. Oppikirjojen ja opettajanoppaiden on todettu hallitsevan matematiikan oppitunteja niin etenemistahdin kuin sisältöalueidenkin suhteen jopa opetussuunnitelmaa enemmän (Perkkilä 2002, 150–152; Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 137). Tulokset oppikirjasidonnaisuudesta ovat huolestuttavia. Kymppi-kartoitus 2:den tulokset antavat melko selkeästi vastauksen siihen, että oppikirjojen sisältämien mekaanisten tehtävien avulla ei ole päästy toivottuun oppimistulokseen. Perkkilän (2002) mukaan oppikirjasidonnaisuudessa voidaan nähdä ristiriitaisuuksia sen kanssa, miten lapsi oppii. Liian nopea symbolitasoon siirtymisessä sivuutetaan lasten ajattelu ja seurauksena voi olla, että matemaattisten käsitteiden moniulotteisuus jää ymmärtämättä. Lisäksi oppikirjojen avulla ei kyetä valaisemaan käsitteiden luonnetta riittävän selkeästi ja käsitteet ovat irrallaan toisistaan. (Perkkilä 2002, 150.) Opettajat (merkitysverkosto 1 ja 3) kokivat haasteeksi oppikirjojen kahlitsevan otteen, sillä sen etenevän tahdin pitäminen tuo painetta ja kiirettä matematiikan opetukseen.

Tämänkin tutkimuksen tuloksia tarkastellessa on hyvää pitää mielessä Perkkilän ja Ojalan (2009, 59) esiin tuomat kannanotot Kuuselan (2000) väitöskirjan tutkimustuloksista, että näistäkin kuudennen luokan oppilaista suurin osa on vielä konkreettisen ajattelun vaiheessa. Ikäheimon (2012, 3) ja useiden kansainvälisten tutkimusten (mm. Van de Walle 2014; Boote 2016) konkreettisilla välineillä on ratkaiseva merkitys lukujärjestelmän hallintaan. Oppilaiden tekemien Kymppi-kartoitus 2:n tehtäväratkaisuja analysoidessa erityisesti desimaalilukujen ymmärtämiseen ja niiden käsittelyyn tarvitaan muita ratkaisuja pinnallisen pilkunsiirto-säännön tilalta. Opettajan (merkitysverkosto 4) esimerkit matematiikan puhumisesta ja oman ajattelun näkyväksi tekemisestä ovat juuri niitä keinoja, joita myös Tikkanen (2008)

väitöskirjassaan painottaa merkityksellisiksi oppimista tukeviksi keinoiksi. Keskustelun lisääminen matematiikan opetukseen, oivallukset ja keksiminen ilman valmiita vastauksia sekä aktiivinen toiminta nousevat arvokkaiksi matematiikan ajattelun ja syvällisen ymmärtämisen tiellä. (Tikkanen 2008, 267–268.)

7.1.2 Mittayksiköiden muunnosten hallinta ja opettajien kokemukset oppilaiden mittayksiköiden muunnosten hallinnasta.

Kaikkien opettajien (yleinen merkitysverkosto) mukaan oppilaiden mittayksiköiden muunnoksia mittaavat tutkimustulokset kertovat odotettua heikoimmasta menestyksestä. Huolestuttavaa on, että jopa kiitettävän oppilaat eivät hallinneet riittävän hyvin tehtäviä. Opettajat silti pitävät mittaamista ja mittayksiköiden muunnoksia tärkeänä osana matematiikan oppimista. Mittayksikkö-kartoitus 1:n tulokset kertovat, että yli 60% :lla oppilaista on vaikeuksia ymmärtää mittayksiköiden muunnoksia ja peräkkäisten yksiköiden välisiä suhteita, jotka näissäkin tehtävissä olivat juuri niitä keskeisiä opetussuunnitelman (POPS 2014) luonnehtimia yleisimmin käytettyjä mittayksiköitä ja suureita. Huolestuttavaa on, että vain reilu 20 % oppilaista suoriutui pituuden, massan ja litratilavuuden yksikönmuunnoksista osoittaen siihen vaadittavaa ja riittävää käsitteellistä ymmärrystä. Mittayksikkö-kartoitus 2:n tuloksista voidaan todeta opettajan (merkitysverkostotyyppi 1) kokemuksia mukaillen, että pinta-aloihin ja tilavuuksiin liittyvät mittayksiköiden muunnostehtävät olivat suurimmalle osalle oppilaista aivan käsittämätön kokonaisuus. Vain 5% oppilaista voidaan katsoa hallitsevan pinta-alojen ja tilavuuksien yksiköiden välisiä suhdelukuja ja mittayksiköiden muunnoksia.

Sinänsä tulokset osoittavat juuri samanlaisia haasteita mittayksiköiden ja yksiköiden välisten suhteiden ymmärtämisestä kuin mitä kansainväliset tutkimukset ovat esittäneet (Van de Walle 2014, 401). Opettajien (yleinen merkitysverkosto) mukaan oppimista haastaa se, että mittaamiseen liittyvät käsitteet ja mittayksiköiden muunnokset opetellaan ulkoa ymmärtämättä niiden todellista merkitystä. Oppilaiden tekemät virhepisteet paljastavat, että pelkkä muistaminen ja mittaamisen proseduraalinen tietotaito eivät enää riitä, vaan tarvitaan riittävää käsitteellistä ymmärrystä. Tiettyyn pisteeseen asti oppilaat voivat selvitä muistisäännöillä, mutta toisinpäin muunnettaessa (yksi senttimetri on sadasosa metristä eli 1cm = 0,01 m) tarvitaan Ikäheimon (2012, 8) mukaan toisenlaisia mittaamiskokemuksia. Virhetyypit muunnostehtävissä olivat paljon puhuvat, sillä desimaalipilkkua käytettiin hyvin sattumanvaraisesti ja tuloksiin oli lisätty useita nollia. Oppilaiden ratkaisuvaihtoehdot ilmentävät, että

likimääräinen käsitys mittayksiköiden koosta oli puutteellinen tai jopa olematon. Mittaamistulosten arvioinnilla ja likimääräisyydellä on tutkimusten mukaan merkittävä rooli mittaamistaitojen kehittymiseen (Joram ym. 2005, 4–5).

Kaikki opettajat (yleinen merkitysverkosto) luonnehtivat, että mittaamisen ja mittayksiköiden muunnosten oppimista tukevat konkreettiset opetusmenetelmät, sillä omakohtaiset kokemukset mittaamisesta tuovat motivaatiota ja mielekkyyttä oppimiseen. Useat kansainväliset tutkimukset vetoavat oppilaiden mittaamiseen liittyvien käsitysten tarkentuvan konkreettisten ja monipuolisten kokemusten kautta (Cheeseman ym. 2014, 146–147). Koska mittaaminen on rinnastettavissa yhdeksi tärkeimmäksi osaksi ihmisen arkielämää ja aihe kuitenkin koetaan vaikeaksi oppia, tulee siihen suunnata huomiota jo varhain alkuopetuksesta lähtien. Opettaja (merkitysverkostotyyppi 1) painottaa, että oppilaiden tulee olla tietoisia mittaamisen tarpeellisuudesta. Van de Wallen ym. (2014, 400) mukaan tämä edellyttää, että oppilaille tarjotaan käytännöllisiä ja todellisia mittaamiskokemuksia. Lukuisat virheet suureiden vertailuissa kuin muunnostehtävissäkin kertovat, että mikään ei korvaa konkreettiseen vertailuun perustuvaa ja arkielämän kokemuksien kautta syntyviä käsityksiä mittaamisen perusperiaatteista.

Opettajat (merkitysverkostotyyppi 1, 2 ja 3) kuvailevat, miten mittaamisen opettamisessa painottuu irrallisten, yksittäisten ja lukuisien ”nippeli” asioiden rutiiniharjoittelu ja sääntöjen muistiinpainaminen. Sen sijaan ongelmaratkaisutaitojen ja kokonaisuuksien korostaminen jäävät vähemmälle. Vastaavia tuloksia nousi esille myös Perkkilän (2002, 150–155) opettajien matematiikkauskomuksia ja opetuskäytänteitä kuvailevassa tutkimuksessa. Opettajien (yleinen merkitysverkosto) mukaan vallitsevat oppikirjojen mukaiset opetuskäytänteet tuovat haastetta säilyttää riittävä etenemistahti, joka aiheuttaa kiirettä opetuksessa. Joutsenlahden ja Vainionpään (2010, 140) mukaan oppikirjojen sivu sivulta noudattamisen vaarana on tottuminen yksipuolisiin ratkaisutehtäviin jättäen ongelmaratkaisutehtävät vähemmälle. Kaikki opettajat kokivat mittaamisen opettamisen vaikeaksi, vaikka heillä kaikilla oli vuosien tai jopa kymmenien vuosien kokemus opetusalalta. Tämä tuo haasteita opettajankoulutukseen ja riittävien resurssien mahdollistamiseen opettajien täydennyskoulutusmahdollisuuksiin. Opetuskäytänteisiin liittyvät muutokset ovat ehdottomia edellytyksiä oppilaiden ajatteluprosessien ja käsitteenmuodostuksen syntymiseen. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa korostuu toiminnallisen ja konkreettisen oppimisen lähtökohdat konstruktivistisen oppimiskäsityksen muovaamana. Myös ilmiöpohjainen opetussuunnitelma painottaa oppilaan aktiivista roolia tiedonrakentajana. (Opetushallitus 2014.)

Opettajan (merkitysverkostotyyppi 4) on havainnut mittaamisen käsitteiden oppimista edistää matematiikan ääneen puhuminen ja mielikuvien käyttäminen. Näitä opetuskäytänteitä voidaan verrata Joutsenlahden vuonna 2003 määrittelemään matematiikan kielentämisen käsitteeseen, joka pitää sisällään käsitteiden konstruointiprosessin, reflektoinnin ja matemaattisen ajattelun jäsentelyn ja ilmaisemisen muille. Kielentämisellä pyritään monipuolistamaan ja yksilöimään oppijan tapaa ratkaista ja kuvata matemaattisia käsitteitä poiketen perinteisestä oppikirjatraditiosta. (Joutsenlahti & Kulju 2015, 58–60, 71–72.) Matematiikan kielentämisen hyötyjä ja sen suotuisia vaikutuksia oppimistuloksiin on todettu useissa tutkimuksissa (mm. Joutsenlahti 2003; Joutsenlahti & Rättyä 2014). Huolestuttavaa kuitenkin on opettajan (merkitysverkostotyyppi 4) kokemus, että oppikirjojen materiaalit eivät useinkaan inspiroi konkretian käyttöön. Opetushallituksen toteuttaman tutkimuksen *Perusopetuksen matematiikan pitkittäisarviointi vuosina 2005-2012* tulosten perusteella kuitenkin voidaan todeta oppilaiden matematiikan oppimisessa erityisen hyödylliseksi mm. monipuoliset luokka-aktiviteetit, sovellukset arkielämään, konkreettiset ja jäsentävät opetuskäytänteet (Metsämuuronen 2013, 133–134).

Tutkimuksen määrälliset tulokset Kymppi-kartoitus 2:n ja Mittayksikkö-kartoitus 1:n voimakkaasta positiivisesta korrelaatiosta kertoo, että kymmenjärjestelmän ymmärtäminen vaikuttaa suoraan mittayksiköiden muunnosten hallintaan. Oppilaan on ymmärrettävä tuhansien, satojen ja kymmenien määrälliset suhteet ymmärtääkseen mittajärjestelmiä ja oppiakseen yksikönmuunnoksia (Kinnunen 2003, 14). Ikäheimon (2012, 85) mukaan valmiit mittayksiköiden muunnostaulukot ja oppikirjojen taulukot eivät tue kaikkien oppilaiden ymmärrystä, vaan tukea kannattaa hakea 10-järjestelmästä. Kaiken kaikkiaan tulokset kertovat, että ei ole yhdentekevää tukea oppilaiden lukujärjestelmän rakennetta ja vankkaa kymmenjärjestelmän hallintaa. Ikäheimon (2015b) kehittämällä mittayksiköiden tukipistemenetelmällä oppilaat hahmottavat konkreettisesti omakohtaisten kokemusten kautta, miten eri mittayksiköt ovat yhteydessä kymmenjärjestelmään. Desimetrien ja kilometrien määrälliset erot tai eri mittayksiköiden väliset suhteet sekä niiden taustalla olevan kymmenjärjestelmää noudattavan mittajärjestelmän ymmärtäminen ei pelkästään ulotu koulumatematiikassa selviytymiseen, vaan koko arkielämän tilanteista selviytymiseen.

7.2 Tutkimuksen eettiset näkökulmat

Tutkimusprosessiin liittyy monia moraalisia ja eettisiä vaatimuksia alkaen tutkimusaiheen valinnasta jatkuen koko tutkimuksen tekemisen ajan. Saavuttaakseni eettisesti kestävät tutkimuskäytänteet olen pyrkinyt olemaan rehellinen, avoin ja kriittinen kaikissa tutkimusprosessin eri vaiheissa (Ks. Alasuutari 2005, 16). Olen pysähtynyt pohtimaan useaan otteeseen tutkimustyön eettisiä näkökohtia ja raportoinut valintojani mahdollisimman huolellisesti ja tarkasti. Tutkija on osa tutkimusta ja tutkimus syntyykin tutkijan kautta. Tutkijan eettiset sitoumukset kuvastuvat tutkimusprosessin aikana tehtyjen valintojen kautta. Tutkimuksen jokaisessa vaiheessa tulee vastaan eettisesti punnittavia ratkaisuja. Tutkijan tulee olla sitoutunut tutkimaansa ilmiöön niin käsitteellisten kuin teoreettistenkin valintojensa kautta. (Pohjola 2003, 54–61.)

Tutkimusaiheen valinta nähdään yhtenä tutkimuksen teon eettisenä kysymyksenä (Tuomi & Sarajärvi 2009, 129). Valitsin tutkimusaiheeni matematiikan osa-alueelta, koska kiinnostukseni matematiikkaa kohtaan on ollut niin voimakasta jo hyvin pitkään. Ajankohtaisten tutkimustulosten tuomat näkökulmat matemaattisten taitojen merkityksellisyydestä alkoivat virittää kiinnostustani saada lisää tietoa ja ymmärrystä aiheesta. Huolestuttavat merkit suomalaislasten matematiikan osaamisen heikkenemisestä ja omien käytännön kokemusten kautta syntyneet käsitykset matematiikan oppimisen ja opettamisen haasteellisuudesta tarjosivat kiinnostavia suuntaviivoja aiheen ideoinnille. Kun minulle tarjoutui mahdollisuus lähteä työstämään tutkimusprosessia yhdessä Hannele Ikäheimon ja Päivi Perkkilän kanssa, en epäröinyt hetkeäkään tarttua tilaisuuteen. Lopullinen tutkimusaihe hioutui kyseisten matematiikan asiantuntijoiden saattelemana. Tutkimusaiheeni on jaksanut ammentaa koko ajan uutta, jopa rönsyilevääkin mielenkiintoa aiheen parissa. Koen tutkimusaiheen ja tutkimuskohteen sisältävän arvolähtökohdiltaankin jo niin yhteiskunnallista kuin tieteensisäistäkin merkitystä.

Eettisesti kestävien tutkimustapojen yhteinen lähtökohta on ihmisarvon kunnioittaminen. Sitä ilmentää pyrkimys turvata tutkittavien itsemääräämisoikeus, vahingoittumattomuus ja yksityisyys. (Kuula 2006a, 60–62.) Tutkimukseen osallistuville tulee eettisten vaatimusten mukaisesti taata yksityisyyden suoja ja varottava ettei tuota heille vaaraa ja moraalista vääryyttä. Eettiset vaatimukset edellyttävät myös, että tutkittavat ovat tietoisia tutkimukseen osallistumisesta ja heillä on päätäntävalta, mitä tietoja haluavat itsestään antaa. (Kuula 2006b, 124.) Nämä vaatimukset korostuvat erityisesti lapsiin kohdistuvassa tutkimuksessa,

joten omassa tutkimuksessa kaikkien eettisten vaatimusten ylläpitäminen osoittautui ensiarvoisen tärkeäksi. Tutkimukseen osallistuvien anonymiteetin olen taannut poistamalla käyttämistäni esimerkeistä kaikki tiedot, joiden avulla tutkittava olisi mahdollista tunnistaa. Lisäksi tutkittavien sukupuoli ei tule ilmi tutkimuksessa. Tunnistetietoina merkitysverkostojen, sitaattien ja lainauksien kohdalla käytetään seuraavia merkintöjä: opettaja 1, opettaja 2, opettaja 3 ja opettaja 4. Tähän päädyin tutkittavien toiveesta. Koska yksi haastatelluista opettajista on koulun erityisopettaja, olen pyrkinyt poistamaan hänen tekstistään kaikki sellaiset yhteydet, jotka antavat viitteitä hänen ammattinimikkeestään. Myös tutkimukseen osallistuvien lasten vanhemmilta on pyydetty kirjallinen lupa tutkimukseen osallistumisesta. Jokainen opettaja on lisäksi ollut koko ajan tietoinen hänen yksityiskohtaisen merkitysverkoston sisällöstään, sillä he ovat saaneet lukea ja täydentää niitä tutkimuksen aikana. Kokonaisuudessaan olen onnistunut toteuttamaan tässä Pro Gradu –tutkielmassa kaikkia edellä kuvattuja hyvien eettisten tutkimuskäytänteiden piirteitä.

7.3 Tutkimuksen luotettavuuden arviointia

Clarkeburn & Mustajoki (2007, 80–81) mukaan tutkijan tulee tunnistaa myös omat velvollisuutensa. Tutkimuksen uskottavuus eli tutkijoiden tieteellisten käytänteiden noudattaminen on yksi tärkeimmistä luotettavuuden kriteereistä (Tuomi & Sarajärvi 2009, 132). Tutkimusta tehdessäni olen kunnioittanut toisten tekemää tutkimuksellista työtä viittaamalla heidän teksteihinsä asianmukaisella tavalla ja noudattanut tiedeyhteisöön kuuluvaa asianmukaista huolellisuutta, avoimuutta ja tarkkuutta. Laadullisen tutkimuksen luotettavuuden arviointi koskee koko tutkimusprosessia aineiston hankinnasta analyysiin ja tulosten esittämistä myöten. Tutkimuksen luotettavuuden tarkastelu perustuu *reliabiliteetin* eli tutkimuksen ja mittaustulosten toistettavuuden ja *validiteetin* eli pätevyyden kriittiseen arviointiin. Toistettavuutta ja pätevyyttä voidaan parantaa monella erilaisella tavalla. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 136–144.) Tämän tutkimuksen luotettavuutta lisää muun muassa triangulaation käyttö, sillä yksinkertaisimmillaan triangulaatio tarkoittaa useiden aineistojen, metodien, teorioiden ja tutkijoiden yhdistämistä tutkimuksessa (Eskola & Suoranta 1998, 69). Määrällisen aineiston ja laadullisen aineiston yhdistämisellä olen pyrkinyt saamaan laajempia ja kokonaisvaltaisempia sekä toisiaan täydentäviä näkemyksiä tutkittavasta ilmiöstä.

Määrällisen tutkimuksen reliabiliteetilla eli luotettavuudella tarkoitetaan tutkimuksen kykyä antaa ei-sattumanvaraisia tuloksia. Luotettavuutta parantaa mittareiden oikea valinta ja soveltuvuus mittauskohteen mittaamiseen. (Valli 2015, 139.) Tutkimuksen määrällisen aineiston mittarit (Kymppi-kartoitus 2, Mittayksikkö-kartoitus 1 ja 2) koostuvat keskeisistä sisällöistä niin kymmenjärjestelmän hallinnan kuin mittayksiköiden muunnosten hallinnankin kannalta, joten ne soveltuvat hyvin mittauskohteen mittaamiseen. Määrällisen aineiston luotettavuutta lisää, että olen kerännyt aineiston itse ja tarkastanut oppilaiden vastaukset huolellisesti useaan kertaan läpi. Oppilaat saivat yksityiskohtaiset ja keskenään samanlaiset ohjeet tehtävien tekemiseen sekä heille annettiin myös riittävästi aikaa tehtävissä suoriutumiseen. Pyrin luomaan tutkimustilanteesta mahdollisimman turvallisen niin, että oppilaiden opettaja oli myös tarvittaessa mukana tilanteessa. Informoin opettajia ja oppilaita tarkasti tutkimuksen kulusta, menettelytavoista ja tarkoituksesta. Tutkimustulosten luotettavuuden takaamiseksi oppilaat eivät saaneet harjoitella kartoituksiin liittyviä tehtäviä etukäteen, joten en myöskään näyttänyt tehtävien sisältöjä etukäteen opettajille. Taulukoin oppilaiden saamat pistemäärät huolellisesti ja tarkasti Excel-tulostaulukkoon, jonka jälkeen siirsin ne SPSS-ohjelmaan (IBM SPSS Statistics 22) sellaisenaan, muokkaamattomana niin kuin ne olivat oppilaiden vastauspapereissa. Aineisto oli myös riittävän suuri osoittaen sen, että tilastolliset menetelmät soveltuivat niiden analysoimiseen. Sinänsä tuloksia ei voi kuitenkaan yleistää koskettamaan koko perusjoukkoa suomalaisista kuudennen luokan oppilaista.

Laadullista aineistoa analysoin Perttulan (1995; 2000) fenomenologisen metodin mukaisesti. Heti alusta pitäen oli ilmiselvää, että lähdin tutkimaan opettajien kokemuksia tutkittavasta ilmiöstä, joita heillä oli syntynyt vuosien työkokemusten kautta. Halusin ennen kaikkea ilmentää opettajien subjektiivisia kokemuksia tutkittavaa ilmiötä kohtaan ja kuvata näiden kokemusten moninaisuutta juuri sellaisenaan kuin ne tutkittaville näyttäytyy. Kokeilin tutkimuksen analyysivaiheen alussa aineistolähtöisen sisällönanalyysin prosessia (Ks. Tuomi & Sarajärvi 2009, 109), kunnes pian huomasin, etten saa ilmausten pelkistämisellä ja ryhmittelyllä riittävän syvällisesti kerittyä auki opettajien kokemuksia tutkittavasta ilmiöstä. Mielestäni fenomenologisen analyysin etuna onkin kokemusten yksilökohtaisuuden säilyminen tutkimusprosessissa mahdollisimman pitkään.

Perttulan (1995) mukaan tutkimusprosessin luotettavuuden arvioinnille on olemassa välttämättömät ja riittävät kriteerit. Välttämättömät kriteerit liittyvät tutkimusprosessin ontologisiin kriteereihin, riittävät puolestaan empiirisiin kriteereihin. Perttula on jaotellut riittävät kriteerit yhdeksään osaan, joiden kautta voidaan tarkastella tajunnallisten merkityssuhteiden

tutkimuksen luotettavuutta valitusta kvalitatiivisesta tutkimusotteesta riippumatta. (Perttula 1995, 98–104.) Välttämättömiä kriteerejä (sulkeistaminen ja mielikuvatasolla tapahtuvan muuntelun toimintatavat) olen käsitellyt laadullisen tutkimuksen metodologisia lähtökohtia ja aineiston analyysiä koskevissa luvuissa. Seuraavaksi esittelen kursivoidulla tekstillä Perttulan kuvaamat riittävät luotettavuuden kriteerit ja tarkastelen, miten ne toteutuivat omassa tutkimuksessani.

Tutkimusprosessin *johdonmukaisuudella* Perttula tarkoittaa, että tutkittavan ilmiön perusrakenteen, aineistonhankintatavan ja teoreettisen lähestymistavan sekä analyysimenetelmän ja tutkimuksen raportoinnin täytyy olla keskenään johdonmukaisia. Tutkimus edellyttää tutkijalta *reflektiivistä kuvausta* niin, että tutkijan on kerrottava lukijalle tutkimusprosessin kulku ja kokonaisuus sekä kyettävä perustelemaan tutkimukselliset valinnat. (Perttula 1995, 102.) Tässä tutkimuksessa olen kiinnittänyt erityistä huomiota tutkimuskohteen ja menetelmien tarkkaan ja loogiseen kuvaukseen sekä perustellut valintojani mahdollisimman läpinäkyvästi. Olen kuvannut konkreettisesti analyysin etenemisen, jolloin lukijan on helpompi muodostaa riittävä käsitys tutkimuksen sisällöstä. Perttulan (1995, 102) mukaan *tutkimusprosessin aineistolähtöisyys* on yksi keskeisimpiä kriteereitä riittävien luotettavuuskriteerien takaamiseksi. Tutkimusprosessin tukeutuminen tutkimuksen aineistoon ja niissä ilmeneviin kokemuksiin on ollut alusta lähtien tärkeässä asemassa. Pyrin systemaattisesti reflektoimaan omien ennakkokäsitysten vaikutusta opettajien kokemuksiin ja palasin useita kertoja tutkimushaastatteluihin varmistaakseni opettajien merkitykselliset ja subjektiiviset kokemukset.

Kontekstisidonnaisuudella Perttula (1995, 102) viittaa kahteen asiaan: tutkimusprosessin sidonnaisuuteen tutkimustilanteeseen sekä tutkimusprosessin sidonnaisuuteen haastateltavien koetussa maailmassa. Teoreettisessa viitekehyksessä tarkastelin suhteellisen laajasti matematiikan oppimisen perustaa jatkuen kymmenjärjestelmän ja mittaamisen näkökulmiin aikaisempien tutkimusten pohjalta, jotta lukija saisi laajemman käsityksen tutkimuskontekstista. Arvioin opettajien kokemusmaailmasta kumpuavat merkitykset kontekstisidonnaisiksi, sillä ne voidaan tulkita olevan sidoksissa suomalaiseen koulumatematiikan oppimisen ja opettamisen maailmaan. Perttulan (1995, 103) *tavoiteltavan tiedon laadun* arvioiminen luotettavuuden näkökulmasta tarkoittaa, että tieto ilmaistaan kielellisesti saavuttaen essentiaalisesti, käsitteellisesti ja persoonakohtaisesti yleistä tietoa. Tavoittelin tutkimuksessani lähinnä käsitteellisesti ja persoonakohtaisesti yleistä tietoa opettajien kokemuksista. Analyysin ensimmäisessä vaiheessa syntyneiden yksilökohtaisten merkitysverkostojen kautta ko-

rostui henkilökohtaiset kokemukset. Tutkimuseettisiin syihin vedoten en kuitenkaan julkaissut niitä kokonaisuudessaan, mikä on luotettavuutta heikentävä asia. Kuitenkin tutkimuksen toisessa vaiheessa muodostui neljä yleistä merkitysverkostotyyppiä, joissa on nähtävissä persoonakohtaiset kokemukset.

Perttula (1995, 103) kehottaa käyttämään *metodien yhdistämisen* vaihtoehtoja, jos ontologinen analyysi osoittaa ilmiön paljastuvan vain niiden avulla. Tutkin kuudennen luokan oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa kahdesta eri aineistosta käsin. Aineiston monipuolisuus lisäsi tutkimuksen luotettavuutta, sillä määrällisen aineiston tuloksia oli mahdollisuus tarkentaa opettajien kokemusten avulla. Perttula (1995, 103) jatkaa vielä, että *tutkijayhteistyö* lisää tutkimusprosessiin systemaattisuutta ja ankaruutta. Tutkimusprosessin aikana olen ollut tiiviissä keskusteluyhteydessä tutkimustani ohjaavien asiantuntijoiden kanssa. Olen hakeutunut myös aktiiviseen keskusteluun matematiikan oppimisen ja opetuksen asioista perillä olevien ihmisten kanssa sekä seurannut kiinnostuneena ajankohtaisia matematiikan tutkimustuloksia. Todettakoon vielä, että Perttulan (1995, 103–104) korostama tutkijan *subjektiivisuuden* huomioiminen on ollut alusta lähtien tiiviisti mukana koko prosessin ajan, mikä näkyy väistämättä seikkaperäisessä ja reflektoivassa tutkimusotteessani.

Tutkijan vastuullisuus on merkittävä osa tutkimuksen luotettavuutta, jonka tulee toteutua koko tutkimuksen tekemisen ajan (Perttula 1995, 104). Aloittelevan tutkijan ja fenomenologisen metodin työläyden näkökulmasta ajatellen on ilmiselvää, että eri vaiheiden systemaattisessa kuvauksessa voi olla haparointia. Dialogi tutkimusaineiston kanssa on kestänyt kuitenkin jo yli vuoden ajan. Olen viipyillyt aineistossani, tarkastellut tulkintojani ja tutkimuksellisia yksityiskohtia huolella. Raportoinnissa näkyy avoimuus tutkimusprosessin suhteen, joten lukijalla on mahdollisuus itse arvioida tutkimuksen luotettavuutta. Näillä perustein voin sanoa toimineeni tutkijana systemaattisen vastuullisesti monella eri tavalla. Fenomenologisen tutkimuksen keskeinen periaate luotettavuuden arvioinnille on tutkijan kyky tavoittaa ilmiö sellaisena, kuin se tutkittavalle ilmenee (Perttula 1995, 71). Koen onnistuneeni tässä suhteellisen hyvin tiedostaen kuitenkin ihmisten merkityssuhteiden kohtaamisen absoluuttisen toteutumisen mahdottomuuden.

7.4 Pohdinta ja jatkotutkimusmahdollisuudet

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää peruskoulun kuudennen luokan oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Tutkimus koostui määrällisestä ja laadullisesta aineistosta. Määrällinen aineisto rakentui kolmen mittarin (Kymppi-kartoitus 2, Mittayksikkö-kartoitus 1, Mittayksikkö-kartoitus 2) (Ikäheimo 2015b, 2016) tulosten tarkasteluun. Mittarien avulla kartoitettiin yhden koulun kuudennen luokan oppilaiden (N=75) kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa. Laadullinen aineisto koostui tutkimukseen osallistuneen koulun kuudennen luokan oppilaiden kolmen luokanopettajan ja yhden erityisopettajan haastatteluista. Laadullisella aineistolla tavoiteltiin opettajien subjektiivisia kokemuksia oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnasta. Opettajien kokemusmaailman kautta pyrittiin hankkimaan syvempiä ja moniulotteisempia näkökohtia, jotta tutkittavan ilmiön kokonaisuus hahmottuisi lukijoille.

Tutkimuksen tulokset puhuttelivat minua monella eri tavalla. Oppilaiden tekemien kartoitusten tehtävät ovat sellaisia, joita kuudennen luokan oppilaiden tulisi hallita. Kymppi-kartoitus 2:n sisällöt koostuvat peruslaskutaitojen osaamista mittaavista tehtävistä. Viime aikoina julkaistut uudet PISA kuin TIMSS –tutkimuksetkin kertovat suomalaislasten matematiikan osaamisen laskusta (Välijärvi & Kupari 2015; Vettenranta ym. 2016). Tämän tutkimuksen tulokset antoivat huolestuttavia tuloksia kuudennen luokan oppilaiden peruslaskutaitojen hallinnasta, sillä yli puolella oppilaista on havaittavissa puutteita kymmenjärjestelmän osaamisessa. Tulokset viittaavat, että rutiininomainen opettelu ja laskutoimitusten drillaaminen eivät ole tuottaneet haluttua tulosta. Heikkojen perustaitojen vuoksi matematiikan oppiminen hankaloituu ja uusien taitojen omaksuminen vaikeutuu entisestään. Tutkimusprosessin aikana nousi puhuttelevaksi sekin tosiasia, että mikäli nuoren matematiikan perustaidot eivät ole riittäviä edes arkielämässä vaadittaviin tarpeisiin, saattavat hänen jatkokoulutuksen mahdollisuudet heikentyä.

Ennen tutkimuksen aihepiiriin syventymistä minulla oli ehtinyt syntyä jo joitakin ennakkokäsityksiä mittaamistaitojen haasteellisuudesta. Useat tutkimukset (mm. Hiebert 1984; Kloosterman ym. 2009; Ikäheimo 2011) osoittivat mittaamisen olleen heikosti osattu aihealue. Tämä lisäsi erityistä kiinnostusta suunnata katsetta myös mitan käsitteen ja mittaamisen alkujuurille, onhan ihmiset kautta aikojen tarvinneet elämän perustarpeisiinsa erilaisia mitan määritteitä. Tämän tutkimuksen tulokset näinkin heikosta menestyksestä mittayksiköiden

muunnosten osaamisessa yllättivät kuitenkin yhtä lailla niin minut kuin opettajatkin. Opettajien kokemuksista ilmeni, että matematiikkaa toivottiin opetettavan ymmärtämisen lähtökohdista, mutta opetuksen tavoitteina näyttäytyi oppikirjan sisältöjen läpikäyminen. Tutkimusaineisto ja teoreettinen viitekehys tukevat vahvasti, että lukukäsitteen ja mittaamistaitojen sekä mittayksiköiden muunnosten ymmärrys vaativat omakohtaisia kokemuksia, konkreettisia ja monipuolisia mahdollisuuksia rakentaa oppilaiden muistivarantoja oppimisen ja edellytysten mukaisesti. Mittaamista ja mittayksiköiden muunnoksia ei opita ulkoa, abstraktina tosiasiana tai pelkän oppikirjan avulla, jossa mittaamistehtävät ”hukkuvat” muiden sisältöjen varaan.

Tutkimuksen tekeminen on pysäyttänyt minua pohtimaan suomalaisen koulumatematiikan ”ihmeen” romahtamisen merkkejä, joita myös Opetusalan ammattijärjestö (OAJ) on useaan otteeseen nostanut esille erityisesti säästötoimien ja koulutusleikkausten yhteydessä. Raha ei tule ratkaisemaan kaikkea, vaan tarvitaan uudenlaisia keinoja suomalaislasten asennemuutoksen kohentamiseen ja pedagogiikan kehittämiseen. Tällä viikolla (14.3.2017) Kansallisen koulutuksen arviointikeskuksen (KARVI) julkaisema laaja matematiikan pitkittäisarviointi antaa lisää haasteita näiden tavoitteiden eteenpäin viemiseksi. Tutkimus paljastaa muun muassa, että matematiikkaa huonosti osaavat pysyvät huonoina läpi koko opintopolkunsa. (Ks. Metsämuuronen & Tuohilampi 2017.) Tarvitaan uudenlaista pedagogiikkaa, aktiivista yhteistyötä matematiikan oppitunneille ja matematiikan opiskelun kiinnostavuuden lisäämistä, jotta myös iän karttuessa matematiikan oppimisen into ei alkaisi nuutua. Myös tämän tutkimuksen myötä ilmeni, miten oppilaiden tulee saada kokea matematiikka tarpeelliseksi niin, että siitä olisi oppijalle oikeasti jotakin konkreettista hyötyä. Koska matematiikka on pysynyt pitkään oppilaiden keskuudessa inhottuna oppiaineena, on aika tehdä muutoksia siinä missä ollaan epäonnistuttu.

Tässä tutkimuksesta ilmeni hyvin selkeästi, että oppilaiden menestyminen kartoituksissa vastasi hyvin pitkälle myös opettajien kokemuksia oppilaiden taitotasosta. Puhuttelevaksi tosiseikaksi nousivat opettajien kokemukset, kuinka tärkeää olisi panostaa kiireettömään, asioiden perusteelliseen ja ymmärtämistä tukevaan opetuskäytänteisiin. Perusopetuksen opetussuunnitelma ei vaadi kiirehtimään, sitä vastoin oppikirja näyttää tekevän kiireen tuntuman. Tällaisten kartoitusten teettämisen jälkeen ja tulosten puhuttelevuuden myötä on ryhdyttävä korjaaviin toimenpiteisiin. Tämä vaatii opettajien välistä saumatonta ja tiivistä yh-

teistyötä, mahdollisesti erilaisten joustavien opetusryhmien järjestämistä sekä sellaisia pedagogisia keinoja, että kaikki opettajat voisivat kuroa auki matematiikan solmuja ja nostaa myös heikoimmin matematiikkaa osaavat lapset ja nuoret takaisin matematiikan kelkkaan.

Koen olleeni tutkijana hyvin etuoikeutetussa asemassa saadessani kulkea yhteisen ja avartavan tutkimusmatkan yhdessä pitkän linjan matematiikan asiantuntijan Hannele Ikäheimon kanssa. Haluan lukijoille kertoa, että tutkimus ei ole jäänyt pelkästään tutkimuksen tasolle, vaan olen saanut olla mukana viemässä pedagogisia työkaluja ja korjaavia tukitoimenpiteitä kentän opetustyöhön. Kiitokseksi opettajien antamasta arvokkaasta tutkimustiedosta järjestimme Ikäheimon kanssa koulutustilaisuuden tutkimukseen osallistuneille opettajille. Siellä Ikäheimo kertoi muualla Suomessa saaduista kokemuksista, jotka vastasivat täysin tällä koululla saatuja kokemuksia ja tuloksia. Mittayksikkötaulut ja tukipisteet sekä kortit (Ikäheimo 2015b) avarsivat opettajien näkemystä uudenlaisesta opetustavasta, jolla mittayksiköiden muunnoksiin saadaan ymmärrystä sen jälkeen, kun oppilaat ovat saaneet omakohtaisia kokemuksia mittaamisesta. Erään opettajan kommentti oli puhutteleva: ”Sain potkun persuksiini! Nyt nähdään, mihin tämä pelkästään oppikirjoihin perustuvat opetus johtaa. Kun saan uuden 5. luokan, aion opettaa ihan toisella tavalla. ” Koulutustilaisuudessa oli aistittavissa, miten omien kokemusten, tutkimisen ja tekemisen sekä konkreettisten mittayksiköiden tukipisteiden kautta lukukäsite, mittaamisen käsite tai suhdeluku eivät jääkään abstraktiksi, vain ulkoa opittavaksi asiaksi.

Tutkimusprosessin aikana olen useaan otteeseen kuullut niin lasten kuin aikuistenkin suusta tämän lausahduksen, ”minä inhoan hehtoja ja dekoja”. Sanoisin, että minulle jäi ikuinen mielikuva kyseisistä mitoista, kun nostin koulutustilaisuudessa pussista sadan gramman suklaalevyn ja kymmenen gramman tikkarin, joiden totesimme painavan hehtogramman (100g) ja dekagramman (10g) verran (Ikäheimo 2015b).

Tässä tutkimuksessa olen kartoittanut oppilaiden kymmenjärjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallintaa sekä selvittänyt osaamisen näyttäytymistä opettajien kokemusten valossa. Jatkossa olisikin mielenkiintoista lähteä tutkimaan, millä tavalla oppilaiden saama korjaava opetus ja tukitoimet ovat vaikuttaneet oppilaiden edistymiseen. Kiinnostavaa olisi tutkia myös lasten käsityksiä ja toiveita matematiikan opetuksesta ja oppimisesta sekä mitä he itse ajattelevat omasta edistymisestään. Koska mittaamisen opettamisen ja oppimisen tutkimuksen sara puuttuu Suomesta täysin, tarjoutuisi sille moniakin jatkotutkimusmahdollisuuksia. Erityisen kiinnostavaa olisi tutkia, minkälaisia muutoksia uusi opetussuunnitelma

(POPS 2014) on tuonut oppikirjojen käytänteisiin ja ovatko uudet opetussuunnitelman luonnehtivat mahdollisuudet lisänneet toivottua käsitteellisempää ja syvällisempää matematiikan osaamista.

Kaiken kaikkiaan tämän tutkimuksen tekeminen on ollut todella antoisaa, opettavaista ja mielenkiintoa herättävää. Olen kokenut kehittyneeni tutkimusprosessissa opettajana hyvin monessakin eri suhteessa. Erityisesti tutkimusmatka on muuttanut suhtautumistani matematiikan oppimisen, opettamisen ja oppikirjoihin liittyvän näkökulman puitteissa. Tutkimus antaa todella arvokasta tietoa varhaisten matemaattisten taitojen ja matematiikan perustan rakentumisen merkityksestä. Tutkimus herättää miettimään, miten saadaan arkielämässä tarpeellinen, matemaattiseksi lukutaidoksi rinnastettava taito vastaamaan tämän maailman matematiikkaa hyödyntävän yhteiskunnan tarpeisiin. Selvää on, että katse tulee suunnata oppilaasta lähtevän kiinnostuksen, motivaation ja todellisuuteen perustuvien kokemusten ruokkimiseen riittävän matematiikan ymmärryksen rakentumisessa.

Lähteet

Alasuutari, P. (2005). *Yhteiskuntatutkimuksen etiikasta.* Teoksessa P. Räsänen, A-H. Anttila & H. Helin (toim.) Tutkimus menetelmien pyörteissä. Sosiaalitutkimuksen lähtökohdat ja valinnat. Jyväskylä: PS-kustannus, (s. 15–28).

Alder, K. (2002). *The measure of all things: The seven-year odyssey and hidden error that transformed the world.* New York: Free Press.

Aunio, P. (2008). *Matemaattiset taidot ennen koulun alkua*. NMI-Bulletin, 18(4), (s. 63–74).

Aunio, P., Hannula, M. M. & Räsänen, P. (2004). *Matemaattisten taitojen varhaiskehitys.* Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen, & P, Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, (s. 198–221).

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2004). *Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2.* Journal of Educational Psychology, 96(4), (s. 699–713).

Aunio, P. & Räsänen, P. (2016). *Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years - a working model for educators*. European Early Childhood Education Research Journal, 24 (5), (s. 684–704).

Baroody, A. J. (2004). *The developmental bases for early childhood number and operations standards.* Teoksessa D. H. Clements, J. Sarama ja A.-M. DiBiase (toim.) Engaging young children in mathematics. Standars for early childhood mathematics education, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. (s. 173–219).

Barret, J. E., Jones, G., Thornton, C. & Dickson, S. (2003). *Understanding Children`s Developing Strategies and Concepts for Length.* Teoksessa D. H. Clements & G. Bright (toim.) Learning and Teaching Measurement. 2003 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. (s. 17–30).

Battista, M. T. (2007). *The development of geometric and spatial thinking*. Teoksessa F. K. Jr. Lester (toim.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics. Carlotte, NC. (s. 843–908).

Beard, R. M. (1971). *Piagetin kehityspsykologia.* Helsinki: Tammi.

BIPM (2006). *Le Systéme international d´unites – The International System of Units.* (8th ed.). Paris: Bureau International des Poids et Mesures.

BIPM. On the future revision of the SI. Luettu 9.1.2017. http://www.bipm.org/en/measurement-units/new-si/

Blackburn, D., Holister, G. & Jotuni, P. (toim.) (1992). *Tieteen maailma: tieteen työkalut.* Kööpenhamina: Bonniers.

Blume, G., Galindo, E. & Walcott, C. (2007). *Performance in measurement and geometry from the viewpoint of Principles and Standards for School Mathematics.* Teoksessa P. Kloosterman & F. Jr Lester. (toim.) Results and interpretations of the 2003 mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress. Reston, VA: NCTM, (s. 95–138).

Boote, S. K. (2016). *Choosing the right tool. Fourth graders use groupable base-ten manipulatives to learn division.* Teaching children mathematics, 22 (8), (s. 476–486).

Cheeseman, J., McDonough, A. & Ferguson, S. (2014). *Investigating young children´s learning of mass measurement.* Mathematics Education Research Journal, 26 (2), (s. 131–150).

Clarke, D., Cheeseman, J., McDonough. & Clarke, B. (2003). *Assessing and Developing Measurement with Young Children.* Teoksessa D. H. Clements & G. Bright (toim.) Learning and Teaching Measurement. 2003 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. (s. 68–80).

Clarkeburn, H. & Mustajoki, A. (2007). *Tutkijan arkipäivän etiikka*. Tampere: Vastapaino.

Clements, D. H. (2004). *Major themes and recommendations*. Teoksessa D. H. Clements, J. Sarama ja A.-M. DiBiase (toim.) Engaging young children in mathematics. Standars for early childhood mathematics education, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. (s. 7–72).

Clement, D. H. & Sarama, J. (2007). *Early Childhood Mathematics Learning.* Teoksessa F. K. Jr. Lester (toim.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics. Carlotte, NC, (s. 461–556).

Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). *Early Childhood Mathematics Intervention*. Science, 333(6045), (s. 968–970).

Clements, D. H & Stephan, M. (2004). *Measurement in Pre-K to Grade 2 Mathematics.* Teoksessa D. H. Clements, J. Sarama ja A.-M. DiBiase (toim.) Engaging young children in mathematics. Standards for early childhood mathematics education, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, (s. 299–317).

Creswell, J. W & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and Conducting mixed methods research.* SAGE.

Donlan, C. & Gourlay, S. (1999). *The importance of non-verbal skills in the acquisition of place-value knowledge: evidence from normally developing and language-impaired children.* British Journal of Developmental Psychology, 17*,* 1-19.

Dudgeon, J. (2014). *Measurement.* Teoksessa A. Hansen (toim.) Children´s errors in Mathematics. London: Sage. (s. 120–154).

Eskola, J. & Suoranta, J. (1998). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Jyväskylä: Vastapaino.

Espoon kaupungin kuntakohtainen opetussuunnitelma. Luettu 12.2.2017. (http://webfronter.com/espoo/perusopetuksen_ops_2016/).

Fuson, K. C. (1988). *Children counting and concepts of number*. New York: Springer Verlag.

Fuson, K. C. (1992). *Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers.* Teoksessa Leinhardt, G., Putnam, R., ja Hattrup, R. A. (toim.) Analysis of arithmetic for mathematics teaching. Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Assosiates, (s. 53–187).

Fuson, K. C. (2004). *Pre-K to Grade 2 goals and standards: Achieving 21 st centyry mastery for all.* Teoksessa D. H. Clements, J. Sarama ja A-M. DiBiase (toim.) Engaging young children in mathematics. Standards for early childhood mathematics education, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. (s. 105–148).

Fuson, K. C. & Briars, D. J. (1990) *Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for Firs- and Second-grade Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction.* Journal for Research in Mathematics Education 21(3), (s. 180–206).

Giorgi, A. (1988). *Sketch of a psychological phenomenological method*. Teoksessa A. Giorgi (toim.) Phenomenology and psychological research. 3.painos. Pittsburg: Duquesne University Press, (s. 8–22).

Grant, T. J. & Kline, K. (2003). *Developing the Building Blocks of Measurement with Young Children.* Teoksessa D. H. Clements & G. Bright (toim.) Learning and Teaching Measurement. 2003 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, (s. 46–56).

Haapasalo, L. (1993). *Desimaalilukujen ja yksikönmuunnosten konstruktivistinen oppiminen.* Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino.

Haapasalo, L. (2011). *Oppiminen, tieto & ongelmaratkaisu.* Joensuu: Medusa-Software.

Hannula, M. M. (2005). *Spontaneous focusing on numerosity in the development of early mathematical skills.* Annales Universitatis Turkuensis, Ser. B, 282. Turku: Painosalama.

Hannula, M. M. & Lehtinen, E. (2005). *Spontaneuous focusing on numerosity and mathematical skills in young children.* Learning and Instruction, 15, (s. 237-256).

Hannula, M. & Lepola, J. (2006). *Matemaattisten taitojen kehittyminen esi- ja alkuopetuksen aikana: Mitkä tekijät ennakoivat aritmeettisten taitojen kehitystä?* Teoksessa J. Lepola, & M. Hannula (toim.) Kohti koulua – kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys. Turku: Turun yliopiston kasvatustieteiden laitos, (s. 129–153).

Hannula, M. & Lepola, J. (2006). *Huomio lasten taitoihin ennen kouluikää*. Teoksessa J. Lepola & M. Hannula (toim.) Kohti koulua – kielellisten, matemaattisten ja motivationaalisten valmiuksien kehitys. Turku: Turun yliopiston kasvatustieteiden laitos. (s. 9–21).

Hannula, M. M., Räsänen, P. & Lehtinen, E. (2007). *Development of counting skills: Role of spontaneous focusing on numerocity and subtizing-based enumeration.* Mathemathical Thinking and Learning 9(1), (s. 51–57).

Haylock, D. & Cockburn, A. (2008*). Understanding Mathematics for Young Children. A guide for foundation stage and lower primary teachers.* London: Sage.

Hiebert, J. (1984). *Why do some children have trouble with learning measurement concepts?* Arithmetic Teacher, 31, (s. 19–24).

Hiebert, J & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis.* Teoksessa J. Hiebert (toim.) 1986. Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, (s. 1–27).

Hirvonen, K. (2012). *Onko laskutaito laskussa? Matematiikan oppimistuloksen peruskoulun päättövaiheessa 2011.* Koulutuksen seurantaraportit 2012:4. Helsinki: Opetushallitus. Luettu 16.1.2017. http://www.oph.fi/download/140234_Onko_laskutaito_laskussa.pdf

Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 2000. *Tutkimushaastattelu. Teemahaastattelun teoria ja käytäntö.* Helsinki: Yliopistopaino.

Ikäheimo, H. (1997). *Matematiikan esi- ja alkuopetuksen kysymyksiä.* Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Yliopistopaino, (s. 239–250).

Ikäheimo, H. (2011a) ALVA eli Ammattilaskennan kartoitus. KokkoTeam Oy OPIKKO.

Ikäheimo, H. (2011b). *Mittayksiköiden muunnoksiin saadaan ymmärrystä, kun ne tehdään käytännössä.* Mahdotonta vai mahdollista matematiikkaa? Erilaisten oppijoiden liitto ry. Verkkolehti LukiSitko 2011 (1), (s. 8). Luettu 7.2.2017. http://www.erilaistenoppijoidenliitto.fi/wp-content/uploads/2012/01/Mittayksikkojen-Muunnot_LS1_2011.pdf

Ikäheimo, H. (2012). *Kymppi-kirja. Matematiikan osaamisen perusta vahvaksi 10-järjestelmällä.* Oy OPPERI Ab. Vantaa: Suomen Painotuote.

Ikäheimo, H. (2015a). *Kymppi-kartoitus 2.* Teoksessa Kymppi-kartoitus. 10-järjestelmän ja mittayksiköiden muunnosten hallinnan kartoitus sekä ohjeet korjaavaa opetusta varten. ELLI Early Learning Oy. Tallinna: K-print.

Ikäheimo, H. (2015b). *Mittayksikkötaulut ja tukipisteet sekä kortit ja ohjekirja.* Tampere: Tevella Oy.

Ikäheimo, H. (2016). *Mittayksikkö-kartoitus 1 ja 2.* Teoksessa Mitta-Kymppi. Käsikirjoitus. Julkaisematon lähde. ELLI Early Learning Oy.

Ikäheimo H., Aalto, A. & Puumalainen, K. (2000). *Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa.* Helsinki: Oy OPPERI Ab.

Ikäheimo H. & Risku A.-M. (2004). *Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta*. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen, & P, Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, (s. 222-240).

Johnson, A. & Norris, K. (2006). *Teaching Today`s Mathematics in the Middle Grades.* Boston: Pearson Education.

Joram, E. (2003). *Benchmarks as Tools for Developing Measurement Sense.* Teoksessa D. H. Clements & G. Bright (toim.) Learning and Teaching Measurement. 2003 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, (s. 57–67).

Joram, E., Gabriele, A. J., Bentheau, M., Gelman, R. & Subrahmanyam, K. (2005). *Children´s Use of the Reference Point Strategy for Measurement Estimation.* Journal for Research in Mathematics Education 36(1), (s. 4–23).

Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C. & Locuniak, M.N. (2009). *Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes.* Developmental Psychology, 45(3), (s. 850–867).

Jordan, N.C., Kaplan,D. & Hanich, L.B. (2002). *Achievement growth in children with learning difficulties in mathematics: findings of a two-year longitudinal study*. Journal of Educational Psychology, 94 (3), (s. 586–597).

Joutsenlahti, J. (2003). *Kielentäminen matematiikan opiskelussa.* Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, (s. 188–196).

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2015). *Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä.* Teoksessa T. Kaartinen (toim.) Monilukutaito kaikki kaikessa. Tampere: Tampereen Yliopistopaino Oy, (s. 57–76).

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2014). *Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa.* Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014. Ainedidaktisia tutkimuksia 8. Jyväskylä: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura, (s. 45–61).

Joutsenlahti, J., & Vainionpää, J. (2010). *Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa.* Teoksessa E. K. Niemi, & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Opetushallitus, (s. 137–148). Luettu 5.2.2017 http://www.oph.fi/download/126919_Miten_matematiikan_taidot_kehittyvat.pdf

Kamii, C., & Clark, F (1997). *Measurement of lenght: The need for a better approach to teaching.* School Science and Mathematics, 97, (s. 116–121).

Karttunen, H. (2006). *Matematiikka. Tiedettä kaikille*. Jyväskylä: Gummerus kirjapaino Oy.

Kinnunen, R. 2003. *Miksi kertotauluun kompastuu. Lukujen hallinta oppimisen perustana*. Turun yliopisto, oppimistutkimuksen keskus.

Kloosterman, P., Rutledge, Z., & Kenney, P.A. (2009). *Exploring results of the NAEP: 1980 s to the present.* Mathematics Teaching in the Middle School, 14. (s. 357–365).

Koponen, T. (2012). *Peruslaskutaito on matematiikan kivijalka*. NMI-Bulletin, 22, (s. 59–62.)

Koponen, T. (2013). *Matematiikan oppimisvaikeudet.* EriKa - Erityispedagoginen tutkimus ja menetelmätieto, 2013(2), (s. 8–12).

Korhonen, H. (2013). *Kymmenjärjestelmä – matematiikan osaamisen kulmakivi.* Dimensio 77 (2), (s. 38–40).

Kupari, P. (2006). *Student and School factors affecting finnish mathematics achievement: results from TIMSS 1999 data*. Teoksessa S. J. Howie & T. Plomp (toim.) Contexts of learning mathematics and science. Lessons learned from TIMSS. London: Routledge, (s. 127–140).

Kupari, K., Sulkunen, S., Vettenranta, J., & Nissinen, K. (2012). *Enemmän iloa oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden lukutaito sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainväliset PIRLS- ja TIMSS-tutkimukset Suomessa.* Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylän yliopistopaino.

Kuula, A. (2006a). *Tutkimusetiikka. Aineistojen hankinta, käyttö ja säilytys*. Tampere: Vastapaino.

Kuula, A (2006b). *Yksityisyyden suoja tutkimuksessa*. Teoksessa J. Hallamaa, V. Launis, S. Lötjönen & I. Sorvali (toim.) Etiikkaa ihmistieteille. Helsinki: Suomen Kirjallisuuden seura, (s. 124–140).

Kuusela, J. (2000). *Tieteellisen paradigman mukaisen ajattelun kehittyminen peruskoulussa*. Väitöskirja, Helsinki: Helsingin yliopisto.

Laine, T. (2007) *Miten kokemusta voidaan tutkia? Fenomenologinen näkökulma*. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin. Juva: WS Bookwell, (s. 28–45).

Lauritzen P. (2012). *Conceptual and procedural knowledge of mathematical functions.* Publications of the University of Eastern Finland. Dissertations in Education, Humanities and Theology, No 34. Joensuu: University of Eastern Finland.

Lawton, F. (2014). *Number: number and place value.* Teoksessa A. Hansen (toim.) Children´s errors in Mathematics. London: Sage, (s. 21–58).

Lee, M. Y., & Francis, D. C. (2016). *Five Ways to Improve Children´s Understanding of Length Measurement.* Teaching children mathematics, 23 (4), (s. 218–224).

Lehrer, R., Jaslow, L. & Curtis, C. (2003). *Developing an Understanding of Measurement in the Elementary Grades.* Teoksessa D. H. Clements & G. Bright (toim.) Learning and Teaching Measurement. 2003 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, (s. 100–121).

Lehtomaa, M. (2008). *Fenomenologinen kokemuksen tutkimus: haastattelu, analyysi ja ymmärtäminen.* Teoksessa Perttula, Juha ja Latomaa, Timo (toim.) Kokemuksen tutkimus: merkitys, tulkinta, ymmärtäminen. 3. painos. Lapin yliopistokustannus, Rovaniemi, (s. 163–193).

Lindgren, S. (1990). *Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa*. Väitöskirja. Tampere: Tampereen Yliopisto.

Lukin, T. (2013). *Motivaatio matematiikan opiskelussa. Seurantatutkimus motivaatiotekijöistä ja niiden välisistä yhteyksistä yläkoulun aikana.* Itä-Suomen yliopisto.

Luoma-aho, E. 2010. *Matematiikan peruskäsitteiden historiaa*. Verkkolehti Solmu. Luettu 22.1.2017 http://solmu.math.helsinki.fi/2010/kasitehist/AlgebraJaAritmetiikka.pdf

Malaty, G. (2003). *Johdatus matematiikan rakenteeseen.* Opetushallitus. Helsinki: Yliopistopaino.

Metsämuuronen, J. (toim.) (2013). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2012-2015.* Koulutuksen seurantaraportti 2013:4. Opetushallitus.

Helsinki: Edita Prima Oy. Luettu 1.3.2017 http://www.oph.fi/download/150841_Perusopetuksen_matematiikan_oppimistulosten_pitkittaisarviointi_vuosina_2005.pdf

Metsämuuronen, J. & Tuohilampi, L. (2017). *Matemaattisen osaamisen piirteitä lukiokoulutuksen lopussa 2015.* Kansallisen koulutuksen arviointikeskus KARVI. Julkaisut 3:2017. Tampere: Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy. Luettu 21.3.2017 https://karvi.fi/app/uploads/2017/03/KARVI_0317.pdf

MIKES. Mittatekniikan keskus. (2005). *Metrologiasta lyhyesti.* Espoo: Otavamedia.

Mononen, R. & Aunio, P. (2013). *Early mathematical performance in Finnish kindergarten and grade one.* LUMAT, 1(3), 245–261.

Niemi, E. K. & Metsämuuronen, J. (toim.) (2010). *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008.* Koulutuksen seurantaraportit 2012:2. Helsinki: Opetushallitus. Luettu 16.1. 2017 http://www.oph.fi/download/126919_Miten_matematiikan_taidot_kehittyvat.pdf

Opetushallitus (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Luettu 6.2.2017 http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

Ostad, S.A. (1999). *Developmental progression of subtraction strategies: a comparison of mathematically normal and mathematically disabled children*. European Journal of Special Needs Education, 14, 21–36.

Perhoniemi, T. (2014). *Mitan muunnelmat: miten määritämme maailmaa, ihmistä ja tietoa.* Tampere: Vastapaino.

Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa.* Väitöskirja. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Perkkilä, P., & Ojala, P. (2009). *Matematiikkaongelma vai ongelmamatematiikka.* Dimensio 73(1), (s. 57–60).

Perttula, J. (1995*) Kokemus psykologisena tutkimuskohteena. Johdatus fenomenologiseen psykologiaan.* Suomen fenomenologinen instituutti. Tampere.

Perttula, J. (2000) *Kokemuksesta tiedoksi: Fenomenologisen metodin uudelleen muotoilua.* Kasvatus 31 (5), (s. 428–442).

Perttula, J. (2008). *Kokemus ja kokemuksen tutkimus: fenomenologisen erityistieteen tieteenteoria.* Teoksessa J. Perttula ja T. Latomaa (toim.) Kokemuksen tutkimus: merkitys, tulkinta, ymmärtäminen. 3. painos. Rovaniemi: Lapin yliopistokustannus, (s. 115–162).

Piaget, J. & Inhelder, B. (1956). *The child´s conception of space.* London: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1977). *Lapsen psykologia.* (suom. M. Rutanen) Jyväskylä: Gummerus.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child´s conception of geometry.* London: Routledge and Kegan Paul.

Pohjola, A. (2003). *Tutkijan eettiset sitoumukset.* Teoksessa A. Pohjola (toim.) Eettisesti kestävä sosiaalitutkimus. Lapin yliopiston yhteiskuntatieteellisiä julkaisuja C. Työpapereita 47. Rovaniemi: Lapin yliopisto, (s. 53–68).

Robinson, A., & Ketola, V. (2008). *Mittaamisen historia.* Helsinki: Multikustannus.

Ross, S. R. (2002). *Place value: Problem solving and written assessment.* Teaching Children Mathematics 8(7), (s. 419–423).

Rusanen, E. & Räsänen, P. (2012). *Matematiikassa heikosti suoriutuvien lasten laskustrategioiden kehitys.* NMI-Bulletin, 22(3), (s. 28–41).

Räsänen, P. (2012). *Laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia*. Duodecim, 2012(128), (s. 1168–1177).

Räty-Záborsky, S. (2006). *Suomalaisten ja unkarilaisten opettajien ja matematiikan oppikirjan tekijöiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta ja oppimisesta vuosiluokilla 1–6.* Väitöskirja. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Joensuun yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja 112.

SFS. (2013). *SI-opas. Kansainvälinen suure- ja yksikköjärjestelmä. International System of Quantities and Units.* Helsinki: Suomen standardoimisliitto SFS Ry.

Silfverberg, H. (1999). *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto.* Tampere: Tampereen yliopisto.

Smith III, J. P., Van Den Heuvel-Panhuizen, M., & Teppo, A. R. (2011). *Learning, teaching, and using measurement: introduction to the issue.* Mathematics Education 43 (5), (s. 617–620).

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). *Linear and area Measurement in Prekindergarten to Grade 2.* D. H. Clements & G. Bright (toim.) Learning and Teaching Measurement. 2003 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. (s. 3–16).

Tikkanen, P. (2008). *"Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisen ja unkarilaisen perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana.* Väitöskirja. Tutkimuksia 337. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2009). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi.* Jyväskylä: Tammi.

Törnroos, J. (2004). *Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset –seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana.* Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13.

Valli, R. (2015). *Johdatus tilastolliseen tutkimukseen.* Jyväskylä: PS-Kustannus.

Van de Walle, J., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics: teaching Developmentally.* Pearson: Harlow.

Vettenranta, J., Hiltunen, J., Nissinen, K., Puhakka, E., & Rautopuro, J. (2016). *Lapsuudesta eväät oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa.* Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylän yliopistopaino.

Välijärvi, J., & Kupari, P. (2015). *Millä eväillä uuteen nousuun? PISA- 2012 tutkimustuloksia.* Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2015:6.

Wright, R. J., Martland, J. & Stafford, A. K. (2006). *Early numeracy: Assessment for teaching and intervention.* London: Sage.

Yle uutiset. (2017). Luettu 6.4.2017 http://yle.fi/uutiset/3-9519967

LIITE 1

TUTKIMUSLUPAHAKEMUS

Hakijan henkilötiedot:

Osoite:
Tytti Nissilä
Siemenpuuntie 2
90420 OULU

Henkilöturvatunnus:
XXX

Puhelinnumero:
xxx xxxxxxx

Sähköpostiosoite:
tytti.nissila@live.com

Tiedot tutkimuksesta:

Tutkinto ja yliopisto, johon tutkimus sisältyy:

Kasvatustieteen pro gradu –tutkielma/ kasvatustieteen maisterin tutkinto/Oulun yliopisto

Tutkimuksen kohderyhmä:

XXX kunta/ perusopetuksen kuudennen luokan oppilaat/XXX yhtenäiskoulu

Tutkimuksen aikataulu:

Tutkimusosa helmi-maaliskuussa 2016, lopullinen tutkimus valmis keväällä 2017

Lyhyt kuvaus tutkimuksesta:

Tutkimuksellani pyrin selvittämään, miten mittayksiköiden muunnokset ja kymmenjärjestelmä hallitaan peruskoulun kuudennella luokalla.

Tutkimuksen ohjaajan tiedot:

Tuomo Vilppola
Kasvatustieteiden tohtori
Oulun yliopisto
Kasvatustieteiden tiedekunta

Puh. ja sähköpostiosoite:
0294 484629
tuomo.vilppola@oulu.fi

Tutkimukseen liittyvät eettiset kysymykset:

Tutkimuksesta ei pysty paikallistamaan tutkimuskohdejoukkoa. Kaikki mittarit, opettajien ja oppilaiden haastattelu- sekä kyselyaineisto hävitetään aineiston analyysin jälkeen. Tutkimukseen osallistuvilta oppilaiden vanhemmilta pyydetään tutkimuslupa.

Allekirjoitukset

Paikka ja aika:

Allekirjoitus ja nimenselvennys:

Oulu 3.11.2015

Tytti Nissilä XXXX (sivistystoimenj. allekirjoitus)

Liitteet (saatekirje)

LIITE 2

SAATEKIRJE

Hyvät XXX yhtenäiskoulun rehtorit ja opettajat,

Olen tekemässä pro gradu -tutkielmaa Oulun yliopiston kasvatustieteellisessä tiedekunnassa oppilaiden matemaattisista taidoista. Pyytäisin saada **kerätä aineistoa** tutkimustani varten koulussanne kevään 2016 aikana. Tutkimuksessani pyrin selvittämään, **miten mittayksiköiden muunnokset ja kymmenjärjestelmä hallitaan peruskoulun kuudennella luokalla.**

Tutkimuksen taustaa:

Viimeisimmässä PISA 2012 –tutkimuksessa on todettu merkittävää laskua suomalaisnuorten matematiikan osaamisessa ja erityisesti oppilaiden asenteissa matematiikkaa kohtaan. Kymmenjärjestelmä on perusopetuksen matematiikan kulmakiviä ja on lukujärjestelmänä keskeinen taito matematiikan oppimisessa. Mittayksiköiden muunnokset pohjautuvat vahvasti kymmenjärjestelmän ymmärtämisen pohjalle. Viimeaikaisten tutkimusten ja tietojen valossa mittayksiköiden muunnokset tuottavat oppilaille haasteita ja oppilaiden omakohtaiset kokemukset mittaamisesta vaihtelevat paljon.

Kohdistamalla tutkimus koskettamaan **peruskoulun kuudennen luokan oppilaita saadaan arvokasta tietoa erityisesti yläkouluun menevien oppilaiden taidoista**. Mittayksiköt ovat niin matematiikan kuin luonnontieteiden, kotitalouden ja elämän hallinnankin näkökulmasta tärkeitä. Toivon, että tutkimukseni herättäisi monet ihmiset miettimään matematiikan taitojen hallinnan merkitystä ihmisen elämän eri osa-alueilla.

Tutkimuksen kohderyhmä:

Peruskoulun kuudennen luokan oppilaat ja opettajat

Tutkimuksen menetelmät ja aineistonkeruu:

Tutkimuksessa käytettävä aineisto on määrällistä ja laadullista.

Määrällisen aineisto koostuu Hannele Ikäheimon kehittämästä **Kymppi-kartoituksesta** (mittari 1 ja mittari 2).

Laadullinen aineisto koostuu **oppilaiden** (noin 10 oppilasta) ja **opettajien** (kuudennen luokan opettajat) **haastatteluista**.

Tutkimuksen aikataulu:

Tutkimuksen empiirinen osuus toteutetaan koululla **helmi-maaliskuussa 2016**.

Kymppi-kartoituksen teettäminen vie aikaa noin **kahden oppitunnin** verran (tutkija itse suorittaa kaikki tutkimukseen liittyvät toimenpiteet, mittari 1 ja 2 toteutetaan eri päivinä).

Haastattelut toteutetaan maaliskuussa 2016 (noin 15min/oppilas/opettaja).

Tutkimus kokonaisuudessaan valmis kevääseen 2017 mennessä.

Tutkimuksen eettiset kysymykset:

Tutkimuksesta ei pysty paikallistamaan tutkimuskohdejoukkoa. Kaikki mittarit, opettajien ja oppilaiden haastattelu- sekä kyselyaineisto hävitetään aineiston analyysin jälkeen. **Tutkimukseen osallistuvilta oppilaiden vanhemmilta pyydetään kirjallinen tutkimuslupa.** Tutkimuksesta on saatu tutkimuslupa XXX kunnan sivistystoimen osastopäälliköltä. (viranhaltijapäätös liitteenä).

Tutkija toimittaa opettajille kartoituksen oppilas- ja luokkakohtaiset tulokset, valmiin tutkimuksen sekä mahdolliset suositeltavat korjaavat toimenpiteet.

Vastaan mielellään kysymyksiinne kaikista tutkimukseen liittyvistä kysymyksistä.

Lisätietoja tutkimuksen aihepiiristä löytyy osoitteessa: http://www.opperi.fi/10_testit/102_kymppi.html ja http://www.opperi.fi/09_kirjat/90_kymppi.html

Ystävällisin terveisin,

Tytti Nissilä
Puh. xxx xxxxxxx
tytti.nissila@live.com

LIITE 3

TUTKIMUSLUPAPYYNTÖ

Oulussa 22.1.2016

Pyydän suostumustanne tutkimukseen, joka toteutetaan kevään 2016 helmi-maaliskuun aikana XXX yhtenäiskoulussa.

Olen tekemässä pro gradu -tutkielmaa Oulun yliopiston kasvatustieteellisessä tiedekunnassa oppilaiden matemaattisista taidoista. Tarkoituksenani on tutkia, miten kuudennen luokan oppilaat hallitsevat kymmenjärjestelmää ja mittayksiköiden muunnoksia. Tutkimus toteutetaan Hannele Ikäheimon Kymppi-kartoituksen ja opettajien haastattelujen pohjalta. Tutkimus antaa arvokasta tietoa oppilaiden keskeisistä matemaattisista taidoista ja auttaa näin opettajia kehittämään opetusta sekä suunnittelemaan tukitoimenpiteitä.

Pyydän lupaa saada teettää lapsellanne Kymppi-kartoituksen ja käyttää siitä saatuja tuloksia tutkimuksessani. Tulokset taulukoidaan ja analysoidaan ilman oppilaiden nimiä, jolloin yksittäisen oppilaan tunnistaminen on mahdotonta. Kaikki mittarit ja haastatteluaineisto hävitetään aineiston analyysin jälkeen. Tutkielmassa ei myöskään kerrota, missä koulussa tutkimus on tehty. Tutkimuksesta on saatu kirjallinen tutkimuslupa XXX kunnan sivistystoimen osastopäälliköltä. Lisäksi koulun rehtori ja opettajat ovat suostuneet mukaan tutkimushankkeeseeni.

Toimitan opettajille kartoituksen oppilas- ja luokkakohtaiset tulokset ja valmiin tutkimuksen, jonka jälkeen Teillä on mahdollisuus saada tietoa oman lapsenne matematiikan oppimisesta ja sen edistymisestä.

Yhteistyöterveisin

Tytti Nissilä
kasvatustiet.maisterikoulutus
tytti.nissila@live.com
Puh: xxx xxxxxxx

Tuomo Vilppola
tutkielman ohjaaja
yliopistolehtori
Oulun yliopisto/
kasvatustieteiden tiedekunta

tuomo.vilppola@oulu.fi
Puh:0294484629

Palautathan tutkimuslupa-anomuksen opettajalle viim. 29.1.2016 mennessä, myös siinä tapauksessa, että oppilas ei saa osallistua tutkimukseen.

Oppilaan nimi_____ ja luokka_____

_____ Annan luvan lapselleni osallistua tutkimukseen

_____ En anna lupaa osallistua tutkimukseen

Päivämäärä ja paikka _____._____ 2016. _____

HUOLTAJAN ALLEKIRJOITUS JA NIMENSELVENNYS _____

LIITE 4

Mittari 1

Tutkimuksen mittari 1 koostuu Hannele Ikäheimon (2011) kehittämästä Kymppi-kartoituksesta 2. Kymppi-kartoitus 2 sisältää luonnollisten lukujen ja desimaalilukujen käsitteisiin liittyviä tehtäviä, laskutoimituksia sekä mittayksiköiden muunnoksia, jotka ovat keskeisiä matematiikan sisältöjä kymmenjärjestelmän hallinnan kannalta. Kymppi-kartoitus materiaalipaketti koostuu kahdesta eritasoisesta kartoituksesta, joista ensimmäinen osa (Kymppi-kartoitus 1) on tarkoitettu tehtäväksi luokille 3–4 ja toinen osa (Kymppi-kartoitus 2) luokille 4–7. (Ikäheimo 2015, 6–7.)

Kymppi-kartoitus 2 sisältää yhdeksän eri osa-aluetta käsittelevää tehtävää kymmenjärjestelmään liittyen. Kartoituksen maksimipistemäärä on 70. Kolme ensimmäistä tehtävää (1-3) liittyvät luonnollisten ja desimaalilukujen käsitteiden hallintaan ja niiden ymmärtämiseen. *Tehtävässä 1* maksimipistemäärä on 6 pistettä. Se sisältää luonnollisten lukujen ja desimaalilukujen vertailuun liittyviä tehtäviä. Oppilaan on valittava kahdesta luvusta suurempi ja osattava vertailla lukuja toisiinsa. Lukujen vertailussa on kyse varhaisista matemaattisista taidoista, sillä vertailun kehittyminen liittyy matemaattisloogisiin taitoihin ja on osa lukukäsitteen pohjataitoja. Lapsen tulee ymmärtää luvun paikka-arvo eli miten luku rakentuu. Luvun arvo riippuu siitä, mistä numeroista luku koostuu ja millä lukupaikalla numerot ovat luvussa. (Hannula &Lepola 2006, 133–136.) Luonnollisten lukujen alueella luvun suuruus määräytyy kymmenjärjestelmän lukupaikan mukaan, esimerkiksi onko numero ykkösten, kymmenten, satojen vai tuhansien paikalla. Desimaaliluvuissa luvun suuruus määräytyy desimaaliosien mukaan, esimerkiksi onko numero kymmenesosien, sadasosien vai tuhannesosien paikalla.

Tehtävässä 2 maksimipistemäärä on 5 pistettä. Tehtävä kartoittaa oppilaan lukujono- ja lukujenkäsittelytaitoja. Tässä tehtävässä oppilaan on jatkettava eteen- ja taaksepäin annettuja lukujonoja sekä luonnollisilla luvuilla että desimaaliluvuilla. Tehtävä kartoittaa oppilaan lukujono- ja lukujenkäsittelytaitoja. Oppilaan pitää osata, miten luku rakentuu lukujonossa toisten lukujen avulla. Useat tutkimukset osoittavat lukujonotaitojen ennustavat hyvin tulevia laskutaitoja, mutta myös kymmenjärjestelmän osaamista (Koponen 2013, 9; Hannula & Lepola 2006, 142, 149). *Tehtävässä 3* maksimipistemäärä on 5 pistettä. Kyseinen tehtävä sisältää lukujen pyöristämiseen liittyviä tehtäviä, jossa joko luonnollinen luku tai desimaa-

liluku on pyöristettävä annettuun tarkkuuteen. Tehtävä edellyttää edelleen varhaisten matemaattisten taitojen hallintaa, kuten lukukäsitteen ja lukujonojen sekä lukusuora-ajattelun ymmärtämistä.

Tehtävässä 4 maksimipistemäärä on 10 pistettä. Tehtävässä kartoitetaan oppilaan taitoja mittayksiköiden muunnoksissa. Mittayksiköitä tulee muuttaa annettuun toiseen mittayksikköön. Tehtävässä on oppilaille tutuimmat yksiköt, kuten pituuden, massan ja litratilavuuden yksiköitä. Mittayksiköiden muunnoksia tehdään sekä isommasta yksiköstä pienenpään että toisinpäin. Mittayksiköiden muunnoksissa korostuu kymmenjärjestelmän ymmärtäminen, koska kyseisten mittayksiköiden välinen suhdeluku on kymmenen. Suurempi yksikkö on aina kymmenkertainen edelliseen yksikköön verrattuna ja pienempi taas on kymmenesosa seuraavaan yksikköön nähden. (Ikäheimo 2012, 75–86.)

Tehtävässä 5 maksimipistemäärä on 4 pistettä. Tehtävä kartoittaa oppilaan laskujärjestyssääntöjen hallintaa. Laskujärjestys on järjestys, jossa matemaattisen lausekkeen laskutoimitukset tehdään. Kyseisessä tehtävässä on kerto- ja jakolaskuja sekä yhteen- ja vähennyslaskuja luonnollisilla ja desimaaliluvuilla. Jos matemaattinen lauseke sisältää useita erilaisia laskutoimituksia (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja), yleensä ensiksi lasketaan kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle ja toiseksi lasketaan yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle. Sulkumerkeillä voidaan muuttaa laskujärjestystä. Sulkumerkkien sisäpuolelle merkityt laskutoimitukset lasketaan ensiksi ja sitten sulkumerkkien ulkopuolelle merkityt laskutoimitukset.

Tehtävä 6 ja 7 sisältävät peruslaskutehtäviä yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuista. Maksimipistemäärä tehtävissä on 10 pistettä. *Tehtävä 6.1* laskutoimitukset koostuvat luonnollisista luvuista ilman kymmenylitystä ja *tehtävä 6.2* puolestaan desimaaliluvuista ilman kymmenylitystä. *Tehtävä 7.1* sisältää laskutehtäviä luonnollisilla luvuilla, joissa on mukana kymmenylityksiä ja *tehtävä 7.2* koostuu laskutehtävistä desimaaliluvuilla kymmenylityksiä vaativien laskujen kanssa. Kymmenjärjestelmän ymmärtäminen paikkajärjestelmänä ja paikka-arvon käsitteen hallinta ovat keskeisiä kyseisten laskutehtävien kohdalla. Oppilaan on ymmärrettävä lukujen paikkajärjestelmät, jotka luovat pohjaa sujuvampaan laskutaitoon (Hannula & Lepola 2006, 136; Kinnunen 2003, 42.) Laskutehtävien sujuva suoriutuminen edellyttää kehittyneitä laskustrategioita ja sujuvan peruslaskutaidon saavuttaminen onkin keskeinen tavoite myöhempien matemaattisten taitojen kannalta (Aunio & Räsänen 2016,

684, 698; Rusanen & Räsänen 2012). Esimerkiksi kymppiparien, lukujen hajotelmien, tuplien ja melkein kuin tuplien käyttö analogioiden avulla ovat strategioita, jotka auttavat ymmärtämään ja selviytymään laskemisesta paremmin. (Ikäheimo 2012, 39–53.)

Kymppi-kartoitus 2:n sisällöt tulisi hallita täysin viimeistään viidennen luokan kevääseen mennessä. Tehtävien hallinnan kannalta on olennaista, että jokaiseen virheeseen suhtaudutaan vakavasti riippumatta kokonaispistemäärästä. Ikäheimon mukaan tehtävissä on kyse niin olennaisista matematiikan sisällöistä, joissa pienetkin puutteet haittaavat oppilaiden matematiikan oppimista. Kartoituksen tekemiseen ei ole asetettu aikarajaa, mutta oppilaat merkitsevät tehtävään aloitus- ja lopetusajan, jolloin on mahdollista selvittää hitauden syyt sekä tarkastella oppilaiden käyttämää aikaa tulosten analysoimisessa. (Ikäheimo 2015a, 6–7.) Kymppi-kartoitus sisällöissä on siis kyse varhaisten matemaattisten taitojen ja esi- ja alkuopetuksessa opittujen lukujonotaitojen sekä laskustrategioiden hallinnasta ensin luonnollisilla luvuilla ja myöhemmin desimaaliluvuilla.

Mittari 1 eli KYMPPI-kartoitus 2

Nimi _____ Luokka _____

Merkitse kellonaika _____ . _____ kun aloitat. Pvm. _____

1.	**<u>Ympyröi</u> vierekkäisistä luvuista suurempi.**	**_____/6**
a.	881 818	
b.	1598 1705	
c.	4,04 4,3	
e.	1,9 1,89	
f.	0,50 0,125	
	<u>Merkitse</u> lukujen väliin > tai < .	
g.	100 200	

2.	**Jatka lukujonoja.**	**___ / 5**
a.	496, 497, 498, _____, _____, _____, _____	
b.	1004, 1003, 1002 , _____, _____, _____, _____	
c.	1907, 1905, 1903, _____, _____, _____, _____	
d.	2,2 , 2,4 , 2,6 , _____ , _____ , _____ , _____	
e.	1,06 , 1,07 , 1,08 , _____ , _____, _____ , _____	

© Hannele Ikäheimo & ELLI Early Learning Oy

3.	**Pyöristä ohjeen mukaan.**	**___/ 5**
a.	Pyöristä **satojen** tarkkuuteen.	545 ≈ _____
b.	Pyöristä **tuhansien** tarkkuuteen.	1835 ≈ _____
c.	Pyöristä **satojen** tarkkuuteen.	1835 ≈ _____
d.	Pyöristä **kymmenien** tarkkuuteen.	1835 ≈ _____
e.	Pyöristä **ykkösten** tarkkuuteen.	1,7 ≈_____

4.	**Muunna annetuksi yksiköksi.**		**___ / 10**
a.	1 *cm* = _____ *mm*	g.	1 *km* = _____ *m*
b.	1 *mm* = _____ *cm*	h.	100 *m* = _____ *km*
c.	1 *m* = _____ *cm*	i.	1 *kg* = _____ *g*
d.	50 *cm* = _____ *m*	j.	500 *g* = _____ *kg*
e.	1 *l* = _____ *dl*		
f.	1 *dl* = _____ *l*		

© Hannele Ikäheimo & ELLI Early Learning Oy

5.	**Laske.**		**____ / 4**
a.	$3 \cdot 4 + 2 =$	c.	$20 + 10 : 2 =$
b.	$10 – 2 \cdot 4 =$	d.	$2 \cdot (1 – 0{,}5) =$

6.1	**Laske.**		**____ / 10**
a.	$13 + 6 =$	f.	$77 – 7 =$
b.	$42 + 7 =$	g.	$17 – 12 =$
c.	$342 + 34 =$	h.	$449 – 26 =$
d.	$2 \cdot 123 =$	i.	$268 : 2 =$
e.	$10 \cdot 24 =$	j.	$150 : 10 =$

6.2	**Laske.**		**____ / 10**
a.	$0{,}3 + 1{,}5 =$	f.	$1{,}7 – 0{,}4 =$
b.	$2{,}4 + 0{,}3 =$	g.	$2{,}27 – 0{,}2 =$
c.	$2{,}36 + 0{,}2 =$	h.	$0{,}68 – 0{,}06 =$
d.	$2 \cdot 0{,}4 =$	i.	$4{,}6 : 2 =$
e.	$10 \cdot 0{,}3 =$	j.	$0{,}5 : 10 =$

© Hannele Ikäheimo & ELLI Early Learning Oy

7.1	**Laske.**		**____ / 10**
a.	48 + 7 =	f.	32 – 7 =
b.	39 + 13 =	g.	26 – 19 =
c.	246 + 107 =	h.	116 – 20 =
d.	2 · 128 =	i.	200 – 15 =
e.	216 : 2 =	j.	401 – 397 =

7.2	**Laske.**		**____ / 10**
a.	0,6 + 0,8 =	f.	2 – 0,4 =
b.	0,06 + 0,09 =	g.	0,2 – 0,02 =
c.	3,3 + 0,73 =	h.	0,16 – 0,09 =
d.	2 · 0,7 =	i.	3 – 0,03 =
e.	1,8 : 2 =	j.	10,5 – 5,05 =

8. Merkitse kellonaika ____. ____ kun lopetat.

Tehtävä	1.	2.	3.	4.	5.	6.1	6.2.	7.1	7.2	YHT.	Aika
Max.	6	5	5	10	4	10	10	10	10	**70**	min.
Pisteet											

© Hannele Ikäheimo & ELLI Early Learning Oy

LIITE 5

Mittari 2

Mittari 2 koostuu Ikäheimon (2016) kehittämästä Mittayksikkö-kartoitus 1 tehtävistä. Tehtävissä kartoitetaan yksikönmuunnostaitoja, kun peräkkäisten yksiköiden välinen suhdeluku on 10: pituus, massa ja litratilavuus. Mittayksikkö-kartoitus 1 sisältää kolme eri tehtävää ja kartoituksen maksimipistemäärä on 30. *Tehtävässä 1* maksimipistemäärä on 6 pistettä. Tehtävässä verrataan kahta pituutta toisiinsa, kun pituudet on esitetty eri mittayksiköissä (esimerkiksi mm ja cm). Tehtävässä verrataan myös kahta painoa toisiinsa, kun massat on ilmoitettu eri mittayksiköissä (esimerkiksi kg ja g). Lisäksi tehtävässä verrataan kahta litratilavuutta toisiinsa, kun ne on ilmoitettu eri mittayksiköissä (esimerkiksi l ja dl). Tehtävä edellyttää mittayksiköiden keskinäisten määrällisten suhteiden ymmärtämistä. Oppilaan on ymmärrettävä, että peräkkäisten yksiköiden välinen suhdeluku on 10. Suurempi yksikkö on aina kymmenkertainen edelliseen yksikköön verrattuna ja pienempi taas on kymmenesosa seuraavaan yksikköön nähden. (Ikäheimo 2016.)

Tehtävässä 2 maksimipistemäärä on 4 pistettä. Tehtävässä oppilaan tulee osata luetella pituuden, massan ja litratilavuuden mittayksiköt järjestyksessä lyhenteitä käyttäen. Tehtävä mittaa taitoa luetella mittayksiköt lyhentein merkittynä järjestyksessä joko pienimmästä suurimpaan tai suurimmasta pienimpään. Tätä taitoa tarvitaan mittayksiköiden muunnoksia tehtäessä.

Tehtävässä 3 maksimipistemäärä on 20 pistettä. Tehtävä sisältää mittayksiköiden muunnostehtäviä pituuden, massan ja litratilavuuden yksiköissä. Tehtävä mittaa oppilaiden taitoa ilmaista esimerkiksi pituus eri mittayksiköissä: kuinka monta millimetriä sisältyy yhteen senttimetriin. Tehtävä mittaa oppilaiden ymmärrystä mittayksiköistä ja niiden välisistä suhteista. Suurempi yksikkö on aina kymmenkertainen edelliseen yksikköön verrattuna ja pienempi taas on kymmenesosa seuraavaan yksikköön nähden. (Ikäheimo 2016.)

Tavoitteena on, että oppilaat hallitsevat näitä muunnoksia ymmärtäen mahdollisimman hyvin jo viidennellä ja kuudennella luokalla (Ikäheimo 2016). Valtakunnallisen opetussuunnitelman (POPS 2014) mukaan matematiikan tavoitteisiin liittyvät keskeiset sisällöt vuosiluokilla 3-6 mittaamisen ja mittayksiköiden muunnosten osalta ovat seuraavat: ohjataan oppilaita ymmärtämään, miten mittayksikköjärjestelmä rakentuu sekä harjoitellaan yksikönmuunnoksia yleisimmin käytetyillä mittayksiköillä. (Opetushallitus 2014, 236.)

Kartoituksessa pari virhettä sallitaan hyvään suoritukseen ja yli puolet tehtävistä pitäisi osata täysin. Oppilaat jaetaan kolmeen ryhmään taitotason mukaan ennen kuin ryhdytään suunnittelemaan korjaavia toimenpiteitä. (Ikäheimo 2016.) Seuraavassa taulukossa on esitelty tasoryhmien pisterajat:

A-taso	**B-taso**	**C-taso**	**Maksimi**
0 – 15 p	16 – 27 p	28 – 30 p	30 p

Mittari 2 eli Mittayksikkö-kartoitus 1

Nimi _____

Luokka _____ Pvm _____ ____ / 30 p

1. Alleviivaa vierekkäisistä suurempi. ___ / 6 p

10 mm 1,5 cm	800 g 1 kg	1 ℓ 15 dl
1 m 7 dm	0,3 kg 200 g	5 dl 0,6 ℓ

2. Täydennä mittayksiköt järjestyksessä. ___ / 4 p

Pituus	km,	hm,	dam,	**m**,	____, _____, _____
Massa	kg,	____,	____ ,	**g**,	_____, _____, _____
Tilavuus litroina				**ℓ**,	_____, _____, _____

3. Muunna annetuiksi yksiköiksi. ___ / 20 p

1 cm = _____ mm

0,1 cm = _____ mm

1 mm = _____ cm

1 m = _____ cm

0,1 m = _____ cm

1 cm = _____ m

1 km = _____ m

0,1 km = _____ m

1 km + 300 m = _____ m

1 ℓ = _____ dl

0, 1 ℓ = _____ dl

5 dl = _____ ℓ

1 dl = _____ ℓ

1 ℓ – 2 dl = _____ dl

1 ℓ + 5 dl = _____ dl

1 kg = _____ g

0,1 kg = _____ g

500 g = _____ kg

500 g + 500 g = _____ kg

1 kg – 100 g = _____ g

© Hannele Ikäheimo & ELLI Early Learning Oy

LIITE 6

Mittari 3

Tutkimuksen mittari 3 koostuu Ikäheimon (2016) kehittämästä Mittayksikkö-kartoituksesta 2. Tehtävissä kartoitetaan yksikönmuunnostaitoja, jotka liittyvät pinta-alaan ja tilavuuteen sekä kuutioina että litroina. Mittayksikkö-kartoitus 2 sisältää kolme eri tehtävää liittyen mittayksiköiden muunnoksiin pinta-aloista, joiden suhdeluku on 100 (10 potenssiin 2) sekä kuutiotilavuuksiin, joiden suhdeluku on 1000 (10 potenssiin 3) sekä myös litratilavuuksiin, joiden suhdeluku on 10. Kartoituksen maksimipistemäärä on 20. *Tehtävässä 1* maksimipistemäärä on 4 pistettä. Tehtävä sisältää suureiden vertailuun liittyviä tehtäviä. Tehtävässä verrataan kolmea pinta-alaa toisiinsa, kun pinta-alat on esitetty kolmena eri mittayksikkönä (esimerkiksi m^2, dm^2 ja cm^2). Tehtävässä tulee verrata myös kolmea tilavuutta toisiinsa, kun tilavuudet on ilmoitettu kolmena eri mittayksikkönä (esimerkiksi cm^3, ml ja dm^3). Tätä mittayksiköiden vertailuun liittyvää ymmärrystä tarvitaan mittayksiköiden muunnoksia tehtäessä.

Tehtävässä 2 maksimipistemäärä on 4 pistettä. Tehtävässä verrataan kahta pinta-alaa toisiinsa, kun ne on esitetty eri mittayksikköinä (esimerkiksi m^2 ja dm^2). Lisäksi tehtävässä verrataan kahta tilavuutta toisiinsa, kun ne on esitetty eri mittayksikköinä (esimerkiksi dm^3 ja cm^3). Tehtävät mittaavat mittaamisen käsitettä ja ymmärrystä mittayksiköistä, joita tarvitaan muunnoksia tehtäessä. *Tehtävässä 3* maksimipistemäärä on 12 pistettä. Tehtävä sisältää pinta-alan, kuutiotilavuuden ja litratilavuuden mittayksiköihin liittyviä muunnoksia. Tehtävä mittaa taitoa muuntaa pinta-alaa (kuinka monta neliödesimetriä sisältyy yhteen neliömetriin) ja tilavuutta (kuinka monta kuutiosenttimetriä sisältyy kuutiodesimetriin ja kuinka monta litraa mahtuu kuutiodesimetriin). (Ikäheimo 2016.)

Tavoitteena on, että oppilaat hallitsevat näitä muunnoksia ymmärtäen ja mahdollisimman hyvin jo kuudennella luokalla. Kartoituksessa pari virhettä sallitaan hyvään suoritukseen ja yli puolet tehtävistä pitäisi osata täysin. Oppilaat jaetaan kolmeen ryhmään taitotason mukaan ennen kuin ryhdytään suunnittelemaan korjaavia toimenpiteitä. (Ikäheimo 2016.) Seuraavassa taulukossa on esitelty tasoryhmien pisterajat:

A-taso	**B-taso**	**C-taso**	**Maksimi**
0 – 10 p	11 – 17 p	18 – 20 p	20 p

Mittari 3 eli Mittayksikkö-kartoitus 2

Nimi _____

Luokka _____ Pvm _____ ____ / 20 p

1. Ympyröi vierekkäisistä yhtä suuret. ___ / 4 p

1 m^2 100 dm^2 100 cm^2	100 cm^3 1 dm^3 1 ℓ
10 cm^2 1 dm^2 100 cm^2	1 cm^3 1 ml 1 dm^3

2. Ympyröi vierekkäisistä suurempi. ___ / 4 p

10 cm^2 1 dm^2	1 dm^3 100 cm^3
1 m^2 1 dm^2	100 ℓ 1 m^3

3. Muunna annetuiksi yksiköiksi. ___ / 12 p

1 cm^2 = _____ mm^2

100 cm^2 = _____ dm^2

1 m^2 = _____ dm^2

0,1 m^2 = _____ dm^2

0,5 m^2 = _____ dm^2

1 dm^2 – 1 cm^2 = _____ cm^2

1 ℓ = _____ dm^3

1 ml = _____ cm^3

5 dm^3 = _____ ℓ

1 dm^3 = _____ cm^3

1 m^3 = _____ dm^3

1 dm^3 – 1 cm^3 = _____ cm^3

© Hannele Ikäheimo & ELLI Early Learning Oy

LIITE 7

Taulukko 4. Mittarin 1 tehtäväpistemäärien jakautuminen

MITTARI 1 **Tehtävien pistemäärät**	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		M	SD
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%		
Tehtävä 1	0	0	0	0	0	0	4	5,3	4	5,3	14	18,7	53	70,7	-	-	-	-	-	-	-	-	5,55	0,83
Tehtävä 2	0	0	1	1,3	5	6,7	8	10,7	26	34,7	35	46,7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4,19	0,97
Tehtävä 3	8	10,7	12	16,0	3	4,0	5	6,7	21	28,0	26	34,7	-	-	-	-	-	-	-	-		-	3,30	1,81
Tehtävä 4	0	0	0	0	1	1,3	2	2,7	7	9,3	2	2,7	4	5,3	5	6,7	11	14,7	11	14,7	32	42,7	8,16	2,25
Tehtävä 5	1	1,3	2	2,7	15	20,0	21	28,0	36	48,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3,19	0,94
Tehtävä 6.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1,3	0	0	4	5,3	4	5,3	13	17,3	53	70,7	9,50	0,98
Tehtävä 6.2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2,7	1	1,3	3	4,0	15	20,0	17	22,7	16	21,3	21	28,0	8,32	1,47
Tehtävä 7.1	0	0	0	0	2	2,7	1	1,3	1	1,3	0	0	2	2,7	9	12,0	14	18,7	13	17,3	33	44,0	8,60	1,83
Tehtävä 7.2	0	0	0	0	0	0	4	5,3	4	5,3	6	8,0	7	9,3	5	6,7	13	17,3	19	25,3	17	22,7	7,73	2,12

LIITE 8

Taulukko 6. Mittarin 2 tehtäväpistemäärien jakautuminen

MITTARI 2 **Tehtävien pistemäärät**	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18		19		20		M	SD
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%		
Tehtävä 1	0	0	0	0	0	0	1	1,3	10	13,3	19	25,3	45	60,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,44	0,78
Tehtävä 2	3	4,0	6	8,0	11	14,7	29	38,7	26	34,7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,92	1,09
Tehtävä 3	0	0	0	0	1	1,3	1	1,3	0	0	2	2,7	1	1,3	1	1,3	1	1,3	1	1,3	3	4,0	4	4,3	3	4,0	2	2,7	3	4,0	1	1,3	7	9,3	5	6,7	9	12,0	12	16,0	18	24,0	15,8	4,68

LIITE 9

Taulukko 9. Mittarin 3 tehtäväpistemäärien jakautuminen

MITTARI 3 **Tehtävien pistemäärät**	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		M	SD
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%		
Tehtävä 1	15	20,0	26	34,7	22	29,3	4	5,3	8	10,7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,52	1,19
Tehtävä 2	0	0	6	8,0	36	48,0	22	29,3	11	14,7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,51	0,84
Tehtävä 3	22	29,3	14	18,7	10	13,3	8	10,7	7	9,3	1	1,3	1	1,3	2	2,7	5	6,7	1	1,3	1	1,3	0	0	3	4,0	2,75	3,21